Université Paris Diderot
UFR de mathématiques
Licence MIASHS
L1 - Algèbre Elémentaire II

Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Montrer que les applications $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes sont linéaires. Caractériser géométriquement ces applications et faire un dessin.

i) $f_1(x, y) = (-x, -y)$

ii) $f_2(x, y) = (3x, 3y)$

iii) $f_3(x, y) = (x, -y)$

iv) $f_4(x, y) = (-x, y)$

v) $f_5(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Quand c'est le cas, dire si elles sont injectives et/ou surjectives.

i) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x - 2 \end{cases}$

ii) $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$

iii) $h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$

iv) $d : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$

v) $u : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P(X) \mapsto XP(X) \end{cases}$

vi) $p : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \mapsto xy + zt \end{cases}$

vii) $I : \begin{cases} \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \end{cases}$

viii) $l : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(0) \end{cases}$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que la donnée de $\begin{cases} u(e_1) = e_1 + e_2 \\ u(e_2) = e_1 - e_2 \\ u(e_3) = e_1 + te_3 \end{cases}$ définit une application linéaire u de E dans E.
Comment choisir t pour que u soit injective ? surjective ?

Exercice 4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X) + (1-X)P'(X) \end{cases}$.
Montrer que f est linéaire et donner une base de $Im(f)$ ainsi que de $Ker(f)$

Exercice 5. Pour chacune des applications linéaires suivantes, trouver une base et un système d'équations caractéristiques de $Ker(f)$ ainsi que de $Im(f)$.

i) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (6x - 2y + 2z, 10x - 3y + 4z, -2x + y) \end{cases}$

ii) $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 2y + z, 4z) \end{cases}$

Exercice 6. Décrire toutes les applications linéaires f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f(1, 0, 0) = (1, 0)$ et $f(0, 1, 0) = (0, 1)$.

Exercice 7. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que pour tout $x \in Ker(f)$ on a $g(x) \in Ker(f)$, et que pour tout $x \in Im(f)$ on a $g(x) \in Im(f)$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
a) Montrer qu'on a $Im(f) \subset Ker(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$.
b) Montrer que si $f \circ f = 0$ alors $I_E + f$ est inversible et donner son inverse.