

# TD 10 Analyse

## Université Paris 7

Les étoiles signifient ;

1. les questions avec une seule étoile sont les questions au niveau de contrôle continue.
2. Les questions avec deux étoiles sont les questions au niveau du partiel. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 10 à l'examen
3. Les questions avec trois étoiles sont les questions plus dur. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 15 à l'examen

**Exercice 1 (\*)**. Calculer les intégrales

1.  $\int_0^6 2xe^{x^2} dx$
2.  $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx$
3.  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
4.  $\int \sqrt{1 - x^2} dx$
5.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan(x))}{\cos(x)^2} dx$
6.  $\int_0^\pi \cos(3x) dx$

**Exercice 2 (\*\*)**. Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1.  $\int \frac{2x^2 - 7x + 3}{x + 5} dx$
2.  $\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{x^2 + 1} dx$
3.  $\int \frac{3x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$
4.  $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
5.  $\int \frac{10}{(x - 3)(x + 1)} dx$
6.  $\int \frac{x}{(x - 2)^2} dx$
7.  $\int \frac{1}{(x + 1)(x^2 - 9)} dx$
8.  $\int \frac{x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 10x + 30}{x^2 + 6x + 9} dx$
9.  $\int \frac{3x^5 + x^4 + 12x^3 + 5x^2 + 7}{x^2 + 4} dx$
10.  $\int \frac{2x^5 + 3x^4 + 18x^3 + 16x^2 + 5x + 1}{x^3 + x^2 + 9x + 9} dx$

**Exercice 3 (\*\*)**.

1.  $\int \frac{\sin(x) dx}{\cos(x) + \sin(x)}$
2.  $\int \frac{\cos(x)}{e^{2x} + 1} dx$
3.  $\int \frac{dx}{\sin(2x)}$
4.  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 4}}$
5.  $\int \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx$
6.  $\int \frac{dx}{x^4 - 16}$
7.  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$
8.  $\int \frac{x dx}{\cos^2(x)}$
9.  $\int (2x + 5x)^2 dx$
10.  $\int \frac{dx}{2x - 3\sqrt{x - 1}}$
11.  $\int \sin(\sqrt{x}) dx$
12.  $\int \cos(2x) \sin(7x) dx$
13.  $\int x^2 e^x - 2x^{-1} dx$

**Exercice 4 (\*\*\*)**. Calculer les intégrales suivants

1.  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$
2.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$
3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{(x - 1)^3}}$
4.  $\int \frac{2x \sin(x) dx}{\cos^3(x)}$
5.  $\int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$
6.  $\int \frac{1 + \cos^2(x)}{1 + \cos(2x)} dx$
7.  $\int \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} dx$
8.  $\int \frac{3x^2 dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$
9.  $\int x \arctan(x^2) dx$

**Exercice 5 (\*)**. (L'inégalité de Cauchy Schwartz) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. On veut montrer l'inégalité

$$\left( \int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$  un nombre réel. Montrer que  $\int_a^b (tg + f)^2 = t^2 \int_a^b g^2 + 2t \int_a^b gf + \int_a^b f^2$ . En déduire que le discriminant du polynôme  $t^2 \int_a^b g^2 + 2t \int_a^b gf + \int_a^b f^2$  est négatif.
2. Montrer l'inégalité.