TD 11 Analyse
Université Paris 7
Code 51BE02MT

Les étoiles signifient;

1. les questions avec une seule étoile sont les questions au niveau de contrôle continue.
2. Les questions avec deux étoiles sont les questions au niveau du partiel. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 10 à l'examen
3. Les questions avec trois étoiles sont les questions plus dures. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 15 à l'examen

Exercice 1 (*)**.** Resoudre sur $\mathbb{R}$ les equations differentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin x$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 2 (**)**.** Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$
2. $xy' + y - 1 = 0$

Exercice 3 (**)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0, +\infty[$
2. $y' - y = x^k exp(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + ln^2(x))y' + 2ln(x)y = 1$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 4 (**)**.** Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et pèriodique de periode $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T .

Exercice 5 (**)**.** On veut determiner les fonctions réelles f dérivables en 0 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Montrer que f est C^∞

3. Trouver une equation differentielle que f verifie.

Exercice 6 (***). Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ verifiant

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

.

1. Montrer que f est C^∞

2. Montrer que f verifie l'equation differentielle $x^2 f''(x) + f(x) = 0$

3. Resoudre l'equation differentielle et en deduire f. (On pourra utiliser le changement de variable $x = e^t$)

Exercice 7 (***). Soit f une fonction C^0 sur $\mathbb{R}$ differente de 0 verifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$$

.

1. Montrer que f est C^∞

2. Montrer que f est impaire (on notera que $f(0) = 0$).

3. Montrer que $\forall x, y, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. En deduire que f verifie une equation differentielle du type $f''(x) - \lambda f(x) = 0$.

4. Resoudre l'equation differentielle et en deduire f.