EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de l'équation du même type que le second membre :

$$\begin{array}{llllll} a) & y' - 3y = 2 & b) & y' + 2y = e^{2x} & c) & y' - 5y = e^{5x} \\ d) & y' - 3x^2y = x^2 & e) & y' + 3x^2y = x^2 & f) & y' - y = \sin x \end{array}$$

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 - x^2)y' - 2xy = 1 \ .$$

a) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle (E).
b) Déterminer la solution qui pour $x = 0$ prend la valeur 1.
c) Résoudre (E) sur $]-\infty, -1[$.
d) Que se passe-t-il au point $x = -1$?

3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution, et en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$\begin{array}{llllll} a) & \cos x y' - \sin x y + \cos x = 0 & b) & y' + y \tan x = \sin x & c) & y' + y \tan x = \cos x \\ d) & x^3 y' + 4(1 - x^2)y = 0 & e) & y' \tan x + y - \sin x = 0 & f) & xy' + y = 2x \end{array}$$

4. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$a) \quad y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad b) \quad y'' - 3y' = 0 \qquad c) \quad y'' - 2y' + 2y = 0 \ .$$

5. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llllll} a) & y'' + 2y' - 8y = e^{3x} & b) & y'' - 3y' - 18y = xe^{4x} & c) & y'' - 10y' + 41y = \sin x \\ d) & y'' + 2y' - 3y = (x + 1)e^x & e) & y'' + 4y = \cos 2x & f) & y'' - 2y' + y = (x + 1)e^x \end{array}$$

6. (Contrôle continu du 16 novembre 2001)
Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' + xy + x = 0 \ .$$

7. (Contrôle continu du 16 novembre 2001)
a) Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 1 \ .$$

b) Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = \cos 2x \ .$$

c) Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = \sin^2 x \ .$$

Corrigé

1. Pour les équations de cet exercice, on cherche tout d'abord les solutions de l'équation homogène en utilisant la suite des opérations usuelles conduisant au résultat, puis on cherche une solution particulière de l'équation complète qui est du même type que le second membre. Les solutions sont obtenues dans **R**.

a) L'équation homogène s'écrit
$$\frac{y'}{y} = 3\ ,$$
ce qui conduit à
$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = 3x\ ,$$
donc a
$$y = Ce^{3x}\ .$$
L'équation possède une solution constante $y_0 = K$, qui vérifie $-3K = 2$ soit
$$y_0 = -\frac{2}{3}\ .$$
Les solutions de l'équation sont
$$y = Ce^{3x} - \frac{2}{3}\ ,$$
où C est une constante quelconque.

b) L'équation homogène s'écrit
$$\frac{y'}{y} = -2\ ,$$
ce qui conduit à
$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -2x\ ,$$
donc a
$$y = Ce^{-2x}\ .$$
L'équation possède une solution de la forme $y_0 = Ke^{2x}$, qui vérifie
$$2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} = e^{2x}\ ,$$
donc en identifiant $K = 1/4$ et
$$y_0 = \frac{1}{4}e^{2x}\ .$$
Les solutions de l'équation sont donc
$$y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\ ,$$
où C est une constante quelconque.

c) L'équation homogène s'écrit
$$\frac{y'}{y} = 5\ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = 5x \ .$$

donc a

$$y = Ce^{5x} \ .$$

L'équation possède une solution de la forme $y_0 = Kxe^{5x}$, qui vérifie

$$Ke^{5x} + 5Kxe^{5x} - 5Kxe^{5x} = e^{5x} \ .$$

donc en identifiant $K = 1$ et

$$y_0 = xe^{5x} \ .$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y = Ce^{5x} + xe^{5x} \ ,$$

où C est une constante quelconque.

d) L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^3 \ ,$$

donc a

$$y = Ce^{x^3} \ .$$

L'équation possède une solution constante $y_0 = K$, qui vérifie $-3Kx^2 = x^2$ donc $K = -1/3$, et

$$y_0 = -\frac{1}{3} \ .$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y = Ce^{x^3} - \frac{1}{3} \ ,$$

où C est une constante quelconque.

e) L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = -3x^2 \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^3 \ ,$$

donc a

$$y = Ce^{-x^3} \ .$$

L'équation possède une solution constante $y_0 = K$, qui vérifie $3Kx^2 = x^2$ donc $K = 1/3$, et

$$y_0 = \frac{1}{3} \ .$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3} \ ,$$

où C est une constante quelconque.

f) L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = 1 \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x \ ,$$

donc a

$$y = Ce^x \ .$$

L'équation possède une solution de la forme $y_0 = A\cos x + B\sin x$, qui vérifie

$$-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x = \sin x \ ,$$

donc en identifiant $-A - B = 1$ et $B - A = 0$, ce qui donne $A = B = -1/2$, et

$$y_0 = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \ .$$

Les solutions de l'équation snt donc

$$y = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \ ,$$

où C est une constante quelconque.

2. a) L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{(1-x^2)'}{1-x^2} \ .$$

Sur $]-1,1[$, on obtient

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\ln(1-x^2) \ .$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = \frac{C}{1-x^2} \ .$$

Faisons varier la constante C en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = \dfrac{C}{1-x^2}$, où C est une fonction. On obtient

$$y' = \frac{C'}{1-x^2} + \frac{2Cx}{(1-x^2)^2} \ ,$$

d'où

$$(1-x^2)y' - 2xy = C' = 1 \ .$$

On en déduit $C = x + K$, d'où les solutions

$$y = \frac{x+K}{1-x^2} \ ,$$

où K est une constante quelconque.

b) On remarque qu'en particulier $y(0) = K$. La seule solution vérifiant $y(0) = 1$ est donc

$$y = \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \ .$$

c) Sur $]-\infty, -1[$, on obtient

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\ln(x^2-1) \ .$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = \frac{C}{x^2-1} \ .$$

Faisons varier la constante C en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = \dfrac{C}{x^2-1}$, où C est une fonction. On obtient

$$y' = \frac{C'}{x^2-1} - \frac{2Cx}{(x^2-1)^2} \ ,$$

d'où

$$(1-x^2)y' - 2xy = -C' = 1 \ .$$

On en déduit $C = -x + H$, d'où les solutions

$$y = \frac{H-x}{x^2-1} \ ,$$

où H est une constante quelconque. Si l'on pose $K = -H$, on trouve de nouveau

$$y = \frac{x+K}{1-x^2} \ ,$$

où K est une constante quelconque.

d) On s'aperçoit que l'on obtient la même expression pour les solutions dans $]-\infty, -1[$ et dans $]-1, 1[$. On peut les écrire $y = \dfrac{x+K}{1-x^2}$. Mais en général une telle expression n'a pas de limite en -1, sauf pour les constantes K telles que l'on puisse simplifier la fraction par $x+1$, c'est-à-dire pour $K = 1$. La fonction trouvée dans *b*) est solution de l'équation sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ tout entier.

3. Pour les équations de cet exercice, on commence par choisir un intervalle sur lequel les coefficients sont définis et le coefficient de y' ne s'annule pas. On cherche les solutions de l'équation homogène en utilisant la suite des opérations usuelles conduisant au résultat, puis on fait varier la constante.

a) On se place sur un intervalle où $\cos x$ n'est pas nul, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ $(k \in \mathbf{Z})$. Sur un tel intervalle $\cos x$ garde un signe constant.

L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\ln|\cos x| \ ,$$

donc a

$$y = \frac{C}{|\cos x|} \ .$$

Sur l'intervalle $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ le signe de $\cos x$ est constant et vaut $(-1)^k$. Donc en posant $C_1 = (-1)^k C$, la solution de l'équation homogène s'écrit $y = \dfrac{C_1}{\cos x}$.

Faisons varier la constante C_1 en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = \dfrac{C_1}{\cos x}$, où C_1 est une fonction. On obtient

$$y' = \frac{C_1'}{\cos x} + \frac{C_1 \sin x}{\cos^2 x} \ ,$$

d'où

$$\cos x y' - \sin x y = C_1' = -\cos x \ .$$

On en déduit

$$C = -\sin x + K \ ,$$

d'où les solutions

$$y = \frac{-\sin x + K}{\cos x} \ ,$$

où K est une constante quelconque.

b) On se place sur un intervalle où $\tan x$ est définie, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ $(k \in \mathbf{Z})$.

L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\cos x)'}{\cos x} \ .$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|\cos x| \ .$$

donc a

$$y = C|\cos x| \ .$$

Sur l'intervalle $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, le signe de $\cos x$ est constant et vaut $(-1)^k$. Donc en posant $C_1 = (-1)^k C$, on obtient

$$y = C_1 \cos x \ .$$

Faisons varier la constante C_1 en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = C_1 \cos x$, où C_1 est une fonction. On obtient

$$y' = C_1' \cos x - C_1 \sin x \ ,$$

d'où

$$y' + y \tan x = C_1' \cos x = \sin x \ .$$

soit

$$C_1' = \frac{\sin x}{\cos x} \ ,$$

On en déduit $C_1 = -\ln|\cos x| + K$, d'où les solutions

$$y = (-\ln|\cos x| + K) \cos x \ ,$$

où K est une constante quelconque.

c) On reprend les mêmes calculs que dans b). La variation de la constante donne cette fois

$$y' + y \tan x = C_1' \cos x = \cos x \ .$$

soit

$$C_1' = 1 \ ,$$

On en déduit $C_1 = x + K$, d'où les solutions

$$y = (x + K) \cos x \ ,$$

où K est une constante quelconque.

d) On se place sur un intervalle où x^3 ne s'annule pas : $\left]-\infty, 0\right[$ ou $\left]0, +\infty\right[$.

L'équation est homogène et s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{4(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{4}{x} - \frac{4}{x^3} \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = 4 \ln|x| + \frac{2}{x^2} \ ,$$

d'où

$$y = Cx^4 e^{2/x^2} \ .$$

e) On se place sur un intervalle où $\tan x$ est définie et non nulle, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $\left]-\pi/2 + k\pi, k\pi\right[$ ou $\left]k\pi, \pi/2 + k\pi\right[$.

L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{(\sin x)'}{\sin x} \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\ln|\sin x| \ ,$$

donc a

$$y = \frac{C}{|\sin x|} \ .$$

Sur un des intervalles choisis $\sin x$ possède un signe constant. On peut donc donner la solution sous la forme

$$y = \frac{C_1}{\sin x} \ .$$

Faisons varier la constante C_1 en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = \dfrac{C_1}{\sin x}$, où C_1 est une fonction. On obtient

$$y' = \frac{C_1'}{\sin x} - \frac{C_1 \cos x}{\sin^2 x} \ ,$$

d'où

$$\tan x y' + y = \frac{C_1'}{\cos x} = \sin x \ .$$

soit
$$C_1' = \cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \ ,$$
On en déduit $C_1 = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + K$, d'où les solutions
$$y = \frac{-\dfrac{1}{4}\cos 2x + K}{\sin x} \ ,$$
où K est une constante quelconque.

Remarque : comme on peut écrire $\cos x \sin x = \sin x (\sin x)'$ on aurait pu aussi donner la solution sous la forme $C_1 = \sin^2 x + K_1$ ou encore $C_1 = -\cos^2 x + K_2$.

f) On se place sur un intervalle où x ne s'annule pas : $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

L'équation homogène s'écrit
$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \ ,$$
ce qui conduit à
$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\ln|x| \ ,$$
d'où
$$y = \frac{C}{x} \ .$$
Faisons varier la constante C en cherchant une solution de l'équation complète sous la forme $y = \dfrac{C}{x}$, où C est une fonction. On obtient
$$y' = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} \ ,$$
d'où
$$xy' + y = C' = 2x \ .$$
On en déduit $C = x^2 + K$, d'où les solutions
$$y = \frac{x^2 + K}{x} \ ,$$
où K est une constante quelconque.

4. a) Le polynôme caractéristique $X^2 - 5X + 6$ a pour racines 2 et 3. Les solutions de l'équation sont donc
$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} \ ,$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) Le polynôme caractéristique $X^2 - 3X$ a pour racines 0 et 3. Les solutions de l'équation sont donc
$$y = A + Be^{3x} \ ,$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) Le polynôme caractéristique X^2-2X+2 a pour racines complexes $1+i$ et $1-i$. Les solutions de l'équation sont donc
$$y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x \ ,$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

5. a) Le polynôme caractéristique X^2+2X-8 a pour racines -4 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc
$$y = Ae^{-4x} + Be^{2x} \ ,$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme
$$y_0 = Ke^{3x} \ .$$
En remplaçant dans l'équation
$$y_0'' + 2y_0' - 8y_0 = 9Ke^{3x} + 6Ke^{3x} - 8Ke^{3x} = 7Ke^{3x} = e^{3x} \ .$$
D'où $K = 1/7$, et
$$y_0 = \frac{1}{7}e^{3x} \ .$$
Les solutions sont donc
$$y = \frac{1}{7}e^{3x} + Ae^{-4x} + Be^{2x} \ .$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) Le polynôme caractéristique $X^2-3X-18$ a pour racines -3 et 6. Les solutions de l'équation homogène sont donc
$$y = Ae^{-3x} + Be^{6x} \ ,$$
où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 4 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme
$$y_0 = (Kx+H)e^{4x} \ .$$
On a
$$y_0' = (4Kx + 4H + K)e^{4x} \quad \text{et} \quad y_0'' = (16Kx + 16H + 8K)e^{4x} \ ,$$
D'où, en remplaçant dans l'équation,
$$y_0'' - 3y_0' - 18y_0 = (-14Kx - 14H + 5K)e^{4x} = xe^{4x} \ .$$
D'où le système
$$\begin{cases} -14K = 1 \\ -14H + 5K = 0 \end{cases}$$
On en déduit $K = -1/14$ et $H = -5/196$, donc
$$y_0 = -\frac{1}{196}(14x+5)e^{4x} \ .$$

Les solutions sont donc

$$y = -\frac{1}{196}(14x+5)e^{4x} + Ae^{-3x} + Be^{6x} \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) Le polynôme caractéristique $X^2 - 10X + 41$ a pour racines complexes conjuguées $5+4i$ et $5-4i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = Ae^{5x}\cos 4x + Be^{5x}\sin 4x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Le second membre $\sin x$ est la partie imaginaire de e^{ix}. Comme i n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme,

$$y_0 = K\cos x + H\sin x \ .$$

On a

$$y_0' = -K\sin x + H\cos x \quad \text{et} \quad y_0'' = -K\cos x - H\sin x \ .$$

D'où, en remplaçant dans l'équation,

$$y_0'' - 10y_0' + 41y_0 = (40K - 10H)\cos x + (40H + 10K)\sin x = \sin x \ .$$

D'où le système

$$\begin{cases} 40K - 10H = 0 \\ 40H + 10K = 1 \end{cases}$$

On en déduit $K = 1/170$ et $H = 2/85$, donc

$$y_0 = \frac{1}{170}\cos x + \frac{2}{85}\sin x \ .$$

Les solutions sont donc

$$y = \frac{1}{170}\cos x + \frac{2}{85}\sin x + Ae^{5x}\cos 4x + Be^{5x}\sin 4x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) Le polynôme caractéristique $X^2 + 2X - 3$ a pour racines 1 et -3. Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = Ae^{x} + Be^{-3x} \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 1 est racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme

$$y_0 = (Kx^2 + Hx)e^x \ .$$

On a

$$y_0' = (Kx^2 + Hx + 2Kx + H)e^x \quad \text{et} \quad y_0'' = (Kx^2 + Hx + 4Kx + 2H + 2K)e^x \ ,$$

D'où, en remplaçant dans l'équation,

$$y_0'' + 2y_0' - 3y_0 = (8Kx + 4H + 2K)e^x = (x+1)e^x \ .$$

D'où le système

$$\begin{cases} 8K = 1 \\ 4H + 2K = 1 \end{cases}$$

On en déduit $K = 1/8$ et $H = 3/16$, donc

$$y_0 = \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x \ .$$

Les solutions sont donc

$$y = \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x + Ae^x + Be^{-3x} \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

e) Le polynôme caractéristique $X^2 + 4$ a pour racines complexes conjuguées $2i$ et $-2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme $\cos 2x$ est la partie réelle de e^{2ix} et que $2i$ est racine du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme

$$y_0 = Kx\cos 2x + Hx\sin 2x \ .$$

On a

$$y_0' = K\cos 2x - 2Kx\sin 2x + H\sin 2x + 2Hx\cos 2x = (2Hx + K)\cos 2x + (-2Kx + H)\sin 2x \ ,$$

puis

$$\begin{aligned} y_0'' &= 2H\cos 2x - 2(2Hx + K)\sin 2x - 2K\sin 2x + 2(-2Kx + H)\cos 2x \\ &= (-4Kx + 4H)\cos 2x - (4Hx + 4K)\sin 2x \ , \end{aligned}$$

d'où

$$y_0'' + 4y_0 = 4H\cos 2x - 4K\sin 2x = \cos 2x \ .$$

D'où $K = 0$ et $H = 1/4$, donc

$$y_0 = \frac{1}{4}x\sin 2x \ .$$

Les solutions sont donc

$$y = \frac{1}{4}x\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

f) Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1$ a pour racine double 1 . Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = (Ax + B)e^x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

On cherche une solution particulière de l'équation complète. Comme 1 est racine double du polynôme caractéristique, il en existe une de la forme

$$y_0 = (Kx^3 + Hx^2)e^x \ .$$

On a

$$y_0' = (Kx^3 + Hx^2 + 3Kx^2 + 2Hx)e^x \ ,$$

puis

$$y_0'' = (Kx^3 + 6Kx^2 + Hx^2 + 4Hx + 6Kx + 2H)e^x \ ,$$

d'où

$$y_0'' - 2Y_0' + y_0 = (6Kx + 2H)e^x = (x+1)e^x \ .$$

D'où $K = 1/6$ et $H = 1/2$, donc

$$y_0 = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x \ .$$

Les solutions sont donc

$$y = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Ax + B\right)e^x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

6. L'équation homogène s'écrit

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \ ,$$

ce qui conduit à

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \ ,$$

donc a

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

L'équation possède une solution constante $y_0 = K$, qui vérifie $K + 1 = 0$ soit

$$y_0 = -1 \ .$$

Les solutions de l'équation sont

$$y = -1 + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \ ,$$

où K est une constante quelconque.

7. Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$ a pour racines complexes conjuguées $1+i$ et $1-i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y = Ae^x\cos x + Be^x\sin x \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

a) L'équation possède une solution constante $y_0 = 1/2$. Donc ses solutions sont

$$y = Ae^x\cos x + Be^x\sin x + \frac{1}{2} \ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) Comme $\cos 2x$ est la partie réelle de e^{2ix}, et que $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, l'équation possède une solution de la forme

$$y_0 = K\cos 2x + H\sin 2x\ .$$

On a

$$y_0' = -2K\sin 2x + 2H\cos 2x \quad \text{et} \quad y_0'' = -4K\cos 2x - 4H\sin 2x\ .$$

D'où, en remplaçant dans l'équation,

$$y_0'' - 2y_0' + 2y_0 = (-2K - 4H)\cos 2x + (-2H + 4K)\sin 2x = \cos 2x\ .$$

D'où le système

$$\begin{cases} -2K - 4H = 1 \\ -2H + 4K = 0 \end{cases}$$

On en déduit $K = -1/10$ et $H = -1/5$, donc

$$y_0 = -\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x\ .$$

Les solutions sont donc

$$y = -\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x + Ae^x\cos x + Be^x\sin x\ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) On a

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\ .$$

D'après le principe de superposition des solutions, une solution particulière est donnée par

$$y_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x\right)\ ,$$

Les solutions sont donc

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x + Ae^x\cos x + Be^x\sin x\ ,$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.