Université Paris 7 - MA2
TD1

***Exercice* 1.** — Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$

1. $\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
2. Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{b^2})$.

***Exercice* 2.** — Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{xy} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y.

***Exercice* 3.** —

1. Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation $|xy| \leq 4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $|x-3| < |x+2|$ et $|x-3||x+2| > 2$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{\frac{2x^2+3x+5}{4x+1}} > 2$.

***Exercice* 4.** —

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

***Exercice* 5.** — Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, e, $f = 0,333\cdots 3 \cdots$, $g = \sqrt{2}$, $h = 0{,}123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots$, $i = 0{,}123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

***Exercice* 6.** — Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

***Exercice* 7.** — Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

***Exercice* 8.** — Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

***Exercice* 9.** — Montrer que l'ensemble $\{r^3\ ;\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

***Exercice* 10.** — Le maximum de 2 nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des 2 nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

***Exercice* 11.** — Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

***Exercice* 12.** — Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0, 1[\cap \mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

***Exercice* 13.** — Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$, (si la question se pose) ?

1. $[0, 3[$,
2. $\{0\} \cup]1, 2]$,
3. $\mathbb{D} \cap [0, 1/3]$,
4. $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 1/n\}$,
5. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

***Exercice* 14.** — Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A,
2. m est un minorant de A,
3. P n'est pas un majorant de A,
4. A est majoré,
5. A n'est pas minoré,
6. A est borné,
7. A n'est pas borné.

***Exercice* 15.** — Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x \leqslant y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.

***Exercice* 16.** — Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

***Exercice* 17.** — Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

***Exercice* 18.** — Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

***Exercice* 19.** — Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \to \sup A \leq \sup B$,
2. $B \subset A \to \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A+B)$.

***Exercice* 20.** — Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque.

***Exercice* 21.** — Soit A l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ pour p et q entiers vérifiant $0 < p < q$.

1. Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$ (pour la borne supérieure on pourra prendre $q = p+1$).

***Exercice* 22.** — Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?