TD 2 Analyse
Université Paris 7

Exercice 1. Montrer que la convergence d'une suite s_n implique la convergence de la suite $|s_n|$. Est ce-que l'autre direction est vraie ?

Exercice 2. Montrer que une suite s_n converge vers 0 si et seulement si $|s_n|$ converge vers 0.

Exercice 3. Soient a_n une suite qui converge vers 0 et b_n une suit bornée. Montrer que $a_n b_n$ converge vers 0.

Exercice 4. Donner un exemple d'une suite a_n qui converge et une suite bornée b_n telles que $a_n b_n$ ne converge pas. Déduire que l'hypothèse de la converge de a_n vers 0 dans l'exercice 3 est nécessaire.

Exercice 5. Montrer que $a_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si a_n est stationnaire.

Exercice 6. Soit a_n une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$$

Déterminer la limite de a_n.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite u_n défini par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
2. Montrer que la suite u_n est monotone.
3. Discuter suivant a l'existence et la valeur de $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 8. Soit a_1, a_2 des nombres réels. Montrer que la suite définie par l'équation $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ converge vers $\frac{a_1+2a_2}{3}$. On pourra utiliser l'identité $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

Exercice 9. Les suites suivantes sont-ils croissantes, décroissantes, bornées ? et Déterminer leur limite s'il existe.

$a_n = \sin(n)$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, $c_n = \log(n)$, $d_n = \frac{\log(n)}{n}$, $f_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - f_n}$ où $0 < f_0 < 1$, $g_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $h_{n+1} = \frac{h_n+1}{2}$ où h_0 est un nombre réel,

Exercice 10. Déterminer la convergence des suites suivantes et calculer la limite s'il existe

$a_n = 1$, $b_n = n$, $c_n = \frac{3}{n}$, $d_n = \frac{6n^4+5n}{7n^4+n^3+2}$, $e_n = 1 + (-1)^n$, $f_n = n \sin \frac{1}{n}$, $g_n = \sin(n)$, $h_n = \frac{\cos n}{n}$, $i_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $j_n = 2^{-n}$, $k_n = \frac{3^n}{n}$, $l_n = \frac{2^n}{n!}$, $m_n = \frac{n^n}{n!}$, $q_n = \frac{19n^3 - 33n^2 + (-1)^n \sqrt{n+1} + n^3 \cos(n^{16})}{n^4 + n\sqrt{n}}$, $r_n = \frac{n^{\frac{9}{8}} + n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{7}}}$, $s_n = 2^{(-1)^n n} 3^{(-1)^{n+1} n}$.

Exercice 11. On suppose que les suites extraites a_{2n} et a_{2n+1} convergent vers la même limite. Montrer que a_n converge.

Exercice 12. Soit a_n une suite réelle telle que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

En utilisant l'exercice 11, montrer que u_n converge vers 0.

Exercice 13. Soient a_n et b_n deux suites telles que

$$0 \leq a_n \leq 1,\ 0 \leq b_n \leq 1 \text{ et } a_n b_n \to 1$$

que dire de ces suites ?

Exercice 14. Soit a_n une suite bornée. On définit les suite $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1} \dots\}$ et $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \dots\}$.

1. Montrer que les suites b_n et c_n sont bien définies et qu'ils sont bornées
2. Montrer que b_n est décroissante et c_n est croissante
3. Déduire que les limites de b_n et c_n existent. On appelle la limite de b_n la limite supérieure de a_n et on appelle la limite de c_n la limite inférieure de a_n. On note

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} c_n.$$

4. Montrer que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
5. Montrer que la suite a_n converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} = \liminf_{n\to\infty}$ et dans ce cas on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.
6. Montrer qu'il existe une suite extraite de a_n qui converge vers $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et qu'il existe une suite extraite de $a_n$qui converge vers $\liminf_{n\to\infty} a_n$

Exercice 15. On suppose que a_n n'est pas bornée et $a_n \geq 0$. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 16. (Difficile ?) Montrer que chaque suite admet une suite extraite soit croissante soit décroissante.