TD 3 Analyse
Université Paris 7

Exercice 1. Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_\epsilon \, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

est equivalent a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_\epsilon \, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Exercice 2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et trouver leur limite.

Exercice 3. Soient a_n, b_n deux suites telles qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{i+k} = b_{j+k}.$$

alors a_n converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si b_n converge vers ℓ.

Exercice 4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que (v_n) converge vers 0 et que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 5. Soit f une fonction continue, strictement croissante (resp. strict decroissante) sur $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\})$ alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$, on definit l'application $f_n : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x-1)^{2n} + n^2 x$.

1. Montrer que, $\forall n > 1, f_n$ est une bijection de $[0, +\infty]$ sur $[1, +\infty]$.
2. En deduire que $\forall n > 1$ l'equation $f_n(x) = n$ a une unique solution que l'on notera u_n.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1/n$. En deduire que la convergence de la suite (u_n).

Exercice 7. Soit (u_n) une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$. On pose

$$v_n = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}.$$

1. Montrer que (v_n) croissante.
2. Etablir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.

3. En deduire que v_n converge vers ℓ.

Exercice 8. Etablir la convergence de $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)$, ou $a > 0$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En deduire que $H_n \to \infty$.

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une suite de rationnels (q_n) telle que $q_n \to x$.