Université Paris 7
MIASHS

TD 4 Analyse

***Exercice* 1 :** Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos(x)+2x\sin(x)=0$ admet au moins une solution dans $[0,\pi]$.

***Exercice* 2 :** Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

***Exercice* 3 :** Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$, et à valeurs dans $[0,2]$.

a) Montrer qu'il existe un réel $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=2x$.

b) Montrer que si de plus, f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x)<2$ pour tout $x\in]0,1[$, alors l'équation $f(x)=2x$ admet une solution unique.

***Exercice* 4 :** Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

***Exercice* 5 :** Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

***Exercice* 6 :** Montrer qu'une fonction $f:[0,1]\to[0,1]$ continue et bijective est strictement monotone.

***Exercice* 7 :** Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$ si $0\le x\le 1$ et $f(x)=ax^2+bx+1$ sinon soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

***Exercice* 8 :** Soit f la fonction définie sur un segment $[a,b]$ par $f(x)=x^2-3x+2$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que la fonction f admette une fonction réciproque. Définir alors f^{-1} et donner $(f^{-1})'$.

***Exercice* 9 :** Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{\cos x-1}\qquad \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\log x-1}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)^{1/3}-1}$$

***Exercice* 10 :** Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ln x^2 & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

***Exercice* 11 :** Prouver l'encadrement $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{15}<\arcsin 0,6<\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{8}$.

***Exercice* 12 :** En utilisant le théorème des accroissements finis :

(1) Montrer que:
  (a) pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on a $|\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$.
  (b) pour tout réel x on a $e^x\ge 1+x$.
  (c) pour tout réel $x>-1$ on a $\ln(1+x)\le x$.
  (d) pour tout $x>0$, $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$.

(2) Calculer:
  (a) $\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln(x))$, $\lim\limits_{+\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))$.
  (b) $\lim\limits_{+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ et $\lim\limits_{+\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.
  (c) $\lim\limits_{+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}})$.

***Exercice* 13 :** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \geq 0 \;\; f(x) \geq x$.

a) Montrer que $f'(0) \geq 1$.

b) Montrer que, quel que soit x strictement positif, il existe un réel c dans $]0, x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.

***Exercice* 14 :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$.
Calculer la quantité réelle c qui intervient dans la formule du théorème des accroissements finis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

***Exercice* 15 :** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = 0$ et $b = 3$ et calculer la quantité réelle c qui intervient dans cette formule.

***Exercice* 16 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$ il existe $c > 0$ tels que $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

***Exercice* 17 :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

***Exercice* 18 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

***Exercice* 19 :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

***Exercice* 20 :** Soit p et q deux nombres réels et un entier $n > 0$. On pose
$f(x) = x^n + px + q$.

a) Montrer que si f admet k racines réelles, f' en admet au moins $k - 1$.

b) En déduire que si n est pair, f a au plus 2 racines réelles et que si n est impair, f en admet au plus 3.

***Exercice* 21 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 1}$. Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, pour tout entier n.

a) Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite ℓ.

c) Montrer que pour tous réels x, $y \in [1, 2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.

En déduire que $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n.

d) Trouver un entier n tel que $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{1000}$.