Analyse - TD 5

Université Paris 7

L1 MIASHS

***Exercice* 1.** — Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

***Exercice* 2.** — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

***Exercice* 3.** — Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

***Exercice* 4.** — Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue,il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

***Exercice* 5.** — Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

***Exercice* 6.** — Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n + 1]$ montrer que
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

***Exercice* 7.** — Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

***Exercice* 8.** — Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, a+2h]$. Par introduction de la fonction $g : t \to f(a+t+h) - f(a+t)$, montrer qu'il existe α dans $]0{,}2[$ tel que

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a+\alpha h)$$

***Exercice* 9.** — Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}. \tag{1}$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}. \tag{2}$$

***Exercice* 10.** — Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)

2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

4. Application: Calculer la limite suivante:
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\text{Arccos}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$