

TD 6 Analyse

Université Paris 7

Les étoiles signifient ;

1. les questions avec une seule étoile sont les questions au niveau de contrôle continue.
2. Les questions avec deux étoiles sont les questions au niveau du partiel. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 10 à l'examen
3. Les questions avec trois étoiles sont les questions plus dures. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 15 à l'examen

Exercice 1 (*). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les approximations finies au point 0 de degré n des fonctions e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$.

Exercice 2 (*). Calculer les approximations finies au point 1 de degré 3 des fonctions $\cos(x^2)$, $e^{\sin(x)}$, $\log(\sin(x))$, $\sqrt{x^2+1}$.

Exercice 3 (**). Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f' existe partout mais que f' n'est pas continue.

Exercice 4 (*). Soit f la fonction $f : x \rightarrow x^{\frac{4}{3}}$. Montrer que f' existe et est continue ($f \in C^1$) mais que f'' n'existe pas au point 0.

Exercice 5 (***)). Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^∞ . Montrer que les fonctions $f+g$, $f.g$, $f(g)$ sont C^∞ . En déduire que les fonctions e^{x^2} , $\cos(x + \sin(x))$, $e^{\sin(\log(x))}$ sont C^∞ .

Exercice 6 (**). Calculer les dérivées des fonctions x^x , $x^{\log(x)}$, $\sin(x^2)^{x+2}$.

Exercice 7 (*). Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 16}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{3}{x})$
4. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \log(x)}{\frac{x}{e} - 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \log(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin(\frac{1}{x})}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(x)}{x - \cos(x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2} - e^4}{x - 2}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 1}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-3} e^x$

Exercice 8 (**). Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}} - x$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{1}{x^2}$