TD 7 Revision partiel
Université Paris 7
Code 51BE02MT

Les étoiles signifient;

1. les questions avec une seule étoile sont les questions au niveau de contrôle continue.
2. Les questions avec deux étoiles sont les questions au niveau du partiel. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 10 à l'examen
3. Les questions avec trois étoiles sont les questions plus dures. Si vous pouvez les faire, vous aurez plus que 15 à l'examen

Probleme 1. Soit $a > 0$ et $u_0 > 0$, on definit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

** Montrer que la suite converge vers $\sqrt{a}$.

* Que ce passe-t-il si $u_0 < 0$? (ne pas refaire toute l'etude, repondre avec un argument en une ligne)

** Soit (v_n) une suite telle que $|v_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{10}|v_n-\ell|$, montrer que $|v_{n+1}-l| \leq 10^{-n}|v_0 - \ell|$. Que peut-on dire de la convergence de (v_n) ? Qu'est ce que cela veut dire en terme de nombre de decimales correctes de v_n par rapport a ℓ ? Et avec $\frac{1}{100}$?

* Montrer que f' est continue sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(\sqrt{a})$.

*** En utilisant la definition de la continuite de f' en $\sqrt{a}$, le theoreme des accroissement finis et la definition de la convergence de u_n vers $\sqrt{a}$ montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid \forall n > N,\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| < \epsilon |u_n - \sqrt{a}|$.

* Faire un developpement limite a l'ordre 2 de f en $\sqrt{a}$.

On dit qu'une suite w_n convergente vers ℓ a une vitesse de convergence quadratique si $\exists C > 0$ tel que $\frac{|w_{n+1}-\ell|}{|w_n-\ell|} \leq C|w_n - \ell|$. En terme de nombre de decimal correcte du u_n par rapport a ℓ cela veut dire que w_{n+1} a grosso modo (cela depend de la valeur de C) le double de decimales corrects par rapport a w_n (c'est enorme compare a ce qu'on obtient dans la question 3).

*** En utilisant la definition d'un developpement limite, la definition de la convergence de u_n vers $\sqrt{a}$ et la question precedente, montrer qu'a partir d'un certain rang, u_n a une vitesse de convergence quadratique. C'est a dire $\exists C > 0,\ \exists N > 0 \mid \forall n > N,\ \frac{|u_{n+1}-\sqrt{a}|}{|u_n-\sqrt{a}|} \leq C|u_n - \sqrt{a}|$.

Bonus : Donner une borne inferieure sur C.

Exercice 2 (**)**.** Soit u_0, on definit la suite (u_n) par $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Etudier la convergence de u_n en fonction de u_0.

Exercice 3 (**)**.**

- Calculer le developpement limite a l'ordre 3 en 0 de $e^{\cos(x)}$
- Calculer le developpement limite a l'ordre 3 en 1 de $\sqrt{x}$
- Calculer le developpement limite a l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\ln(\sin x)$

Exercice 4 (**)**.** Calculer avec un developpement limite

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ln(x+1)}{ln(x)}\right)^x$$

Donner un equivalent de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - \ell$$

Exercice 5 (**)**.** Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{\sin(x^4)}$$

.

Exercice 6. Soit a un réel strictement positif, et soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x-y|$$

- * Montrer que f est injective.
- ** En deduire qu'elle est strictement monotone.
- ** En utilisant le theoreme de la bijection montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (**)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, et soit $p \geq 1$ un entier fixé. Montrer qu'il existe un réel $x_p \in [0,1]$ tel que

$$f(x_p + \frac{1}{p}) = f(x_p)$$

Exercice 8 (***)**.** Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \to b^-$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.

On utilisera la caracterisation suivante de la limite d'une fonction : $\lim_{x\to y} f(x)$ existe si et seulement si pour toute suite x_n de cauchy convergente vers y, la suite $f(x_n)$ est de cauchy. Ainsi que le theoreme des accroissements finis pour prouver la continuite a gauche de f.

Pour la derivabilite a gauche en b, on utilisera la definition de la derivabilite en b, le theoreme des accroissements finis, et la caracterisation de la limite d'une fonction par les suites.