Université Paris 7
MIASHS

Série n^o 8

Exercice n^o 1 **:** Montrer que, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Exercice n^o 2 **:** Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice n^o 3 **:** Ecrire la formule de Taylor pour la fonction exponentielle sur $[0,1]$ à l'ordre $n+1$ et en déduire que :

$$\left| e - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) \right| < \frac{e}{(n+1)!}$$

En déduire la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

Exercice n^o 4 **:** Ecrire la formule de Taylor pour la fonction $\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ à l'ordre $n+1$ et en déduire que :

$$\left| \ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}) \right| < \frac{1}{(n+1)}$$

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice n^o 5 **:** Ecrire la formule de Taylor au point 1 et à l'ordre 2 pour la fonction arctan et en déduire que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq (\arctan x) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

Exercice n^o 6 **:** Donner le DL d'ordre n au point a des fonctions suivantes :

$\sin x \cos 2x$	$n=6$ $a=0$	$\cos x \, ln(1+x)$	$n=4$ $a=0$	$\tan x$	$n=6$ $a=0$
$(x^3+1)\sqrt{1-x}$	$n=3$ $a=0$	$\dfrac{x}{\sin x}$	$n=5$ $a=0$	$\ln \dfrac{\sin x}{x}$	$n=4$ $a=0$
$e^{\cos x}$	$n=5$ $a=0$	$e^{\sqrt{\cos x}}$	$n=5$ $a=0$	$(\cos x)\sqrt{1+x}$	$n=4$ $a=0$
$\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$	$n=4$ $a=0$	$\dfrac{\ln^2(1+x)}{e^x-1}$	$n=4$ $a=0$	$\ln(\cos x)$	$n=4$ $a=0$
$e^{Arcsin\, x}$	$n=4$ $a=0$	$(1+Arctg\, x)^{\frac{\sin x}{x}}$	$n=3$ $a=0$	$x[ch\, x]^{\frac{1}{x}}$	$n=4$ $a=0$
$\sqrt{1-\ln(1+x)}$	$n=4$ $a=0$	$\sqrt{x}$	$n=3$ $a=1$	$\ln x$	$n=3$ $a=1$
e^x	$n=4$ $a=1$	$\cos x$	$n=4$ $a=\frac{\pi}{2}$	$\cos(\ln x)$	$n=3$ $a=1$
$-\dfrac{1-x}{1+\arctan x}$	$n=4$ $a=0$	$\sin(x^2)$	$n=7$ $a=0$	$(\sin x)^2$	$n=7$ $a=0$
$\arctan(x^2)$	$n=7$ $a=0$	$(\arctan x)^2$	$n=7$ $a=0$	$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$	$n=2$ $a=0$

Exercice n^o 7 **:** Donner le développement limité de la fonction $\ln(1+x^2)$ au point 1 à l'ordre 3.

Exercice n^o 8 **:** Calculer la dérivée septième et huitième en 0 des fonctions $\sqrt{1-\sin(x^2)}$ et $\sqrt{1-\sin(x^4)}$.

Exercice n^o 9 **:** Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. En déduire la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice n^o 10 **:** Déterminer a et b pour que la fonction $f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait un développement limité nul à l'ordre 5 en 0, c'est-à-dire $f(x) = x^5\, \epsilon(x)$.

Exercice n

Exercice n^o 11 :

a) Ecrire le DL à l'ordre 7 de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{\arctan x^2} - \frac{1}{x}$$

au voisinage de 0.

b) Décrire la position relative, au voisinage de 0, du graphe de la fonction f et celui de la cubique $c : x \longmapsto x^3/3$

Exercice n^o 12 : Déterminer les limites suivantes:

$\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}\ (x \to 0)$	$\dfrac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{x^2}\ (x \to 0)$	$\dfrac{\sqrt{\sin x} - x}{\sin \sqrt{x} - \sqrt{x}}$
$\dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{(sin\, x)^4}(x \to 0)$	$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\ (x \to 0)$	$\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\ (x \to 0)$
$\dfrac{\cos x + \cosh x - 2}{x^4}\ (x \to 0)$	$\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}\ (x \to 0)$	$\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2\,x)^2}\ (x \to \dfrac{\pi}{2})$
$\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+tan\, x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}\ (x \to 0)$	$\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\ (x \to +\infty)$	$\dfrac{2x}{ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)} - \cos x\ (x \to 0)$
$\dfrac{ch\, 2x - ch\, x}{\sin^2 x}\ (x \to 0)$	$\dfrac{x(1+\cos x) - 2\, tan\, x}{2x - \sin x - tan\, x}\ (x \to 0)$	$\dfrac{x^x - 1 - (\sin x) \ln x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}\ (x \to 0)$
$\dfrac{1}{x^2} \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\ (x \to 0)$	$\dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x}\right]\ (x \to 0)$	$\dfrac{(\sin x - x) \ln \lvert x\rvert}{\lvert x\rvert^{5/2}}\ (x \to 0)$

Exercice n^o 13 : Calculer la limite quand x tend vers 0, de la fonction

$$\frac{2(1 - cos\, x) \sin x - x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x - x^5}$$

Exercice n^o 14 : Calculer la partie principale quand x tend vers 0, de la fonction

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$$

Exercice n^o 15 : Ecrire le développement limité des fonctions $\cos x - ch\, x$ et $ln(1+x)^2$ à l'ordre 2 en 0.

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - ch\, x}{(ln(1+x))^2}$.

Exercice n^o 16 : Donner le développement limité de la fonction $f(x) = sh^2(x) - xtg(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 6.

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{sin^6(x)}$.

Exercice n^o 17 : On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$, telles que $f(0) = g(0) = 0$; $f'(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) \neq 0$. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)}$.

***Exercice n^o* 18** : Soient f et g deux fonctions impaires de classe $\mathcal{C}^3$ sur un voisinage de 0, avec $g'''(0) \neq 0$. Déterminer : $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$.

***Exercice n^o* 19** : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

a- Montrer que f est définie pour $x \neq 0$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction obtenue par ce prolongement.

b- Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

c- Etudier la dérivabilité de la fonction f. Préciser la tangente à la courbe de f en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

***Exercice n^o* 20** : Soit f la fonction définie par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

a- Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

b- Montrer que f est prolongeable par continuité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par une fonction g.

c- Etudier la dérivabilité de la fonction g. Préciser la tangente à la courbe représentative de g au point 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.