Analyse - TD9

Université Paris 7
L1 MIASHS

***Exercice* 1.** — Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

***Exercice* 2.** — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que f est positive sur $[a,b]$, continue en un point $x_0 \in [a,b]$ et que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est identiquement nulle.
2. On suppose maintenant que f est continue sur $[a,b]$, et que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application: on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

***Exercice* 3.** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F : x \to \int_0^x f(t)dt$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est $T-$périodique sur $\mathbb{R}$, alors F est $T-$périodique sur $\mathbb{R}$.

7. Si f est paire, alors F est impaire.

***Exercice* 4.** — Calculer les primitives suivantes.

1. Par intégration par parties :
   a) $\int x^2 \ln(x)dx$ **b)** $\int x \arctan(x)dx$ **c)** $\int \ln(x)dx$ **d)** $\int (\ln(x))^2 dx$ **e)** $\int \cos(x)\exp(x)dx$.

2. Par changement de variable :
   a) $\int (\cos(x))^n sin(x)dx$ **b)** $\int \frac{1}{x\ln(x)}$ **c)** $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ **d)** $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$.

***Exercice* 5.** — Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs:

a) $\displaystyle\int \arctan x dx$ **b)** $\displaystyle\int \tan^2 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
e) $\displaystyle\int \arcsin x dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$
i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$ **l)** $\displaystyle\int \cos x \exp x dx$

***Exercice* 6.** — Calculer les intégales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$
d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$
g) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x dx$ **h)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$ **i)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$

***Exercice* 7.** — Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

***Exercice* 8.** — Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs:

a) $\displaystyle\int \sin^8 x \cos^3 x dx$ **b)** $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \cos^{2003} x \sin x dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx$
e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{7+\tan x}dx$

***Exercice* 9.** — Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.