Un corrigé DM n°1

***Exercice* 1. —** Calculer le PGCD $D \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $D = AU + BV$.

$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$;

Une première rédaction

Réponse — $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.

• On divise A par B ce qui donne:

$A = BQ_1 + R_1$ avec $Q_1 = X + 1$, $R_1 = -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8$.

• Puis on divise B par R_1 ce qui donne:

$B = R_1Q_2 + R_2$ avec $Q_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ et $R_2 = 9X^2 + 27X + 18$.

• En dernier on divise R_1 par R_2 ce qui donne:

$R_1 = R_2Q_3$ avec $Q_3 = -\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}$.

On récapitule les trois divisions divisions obtenues:

$$\begin{cases} A &= BQ_1 + R_1 \\ B &= R_1Q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2Q_3 \end{cases}$$

Conclusion: $R_2 = 9X^2 + 27X + 18$ le dernier reste non nul donne le PGCD

$$D = X^2 + 3X + 2.$$

Remarquons que

$$D = \frac{1}{9}R_2.$$

On va utiliser les deux premières divisions [1] pour trouver U et V vérifiant $UA + VB = D$.

• On commence par extraire R_2 à partir de la deuxième division [2] $B = R_1Q_2 + R_2$ qui donne

$$B - R_1Q_2 = R_2 \quad (*)$$

Éliminons R_1 de $(*)$ en utilisant la première division.

• La première division $A = BQ_1 + R_1$ donne

$$R_1 = A - BQ_1.$$

[1] L'algorithme n'utilise que les division contenant un reste non nul.

[2] On commence toujours par extraire le dernier reste non nul à partir de la division contenant ce dernier reste non nul.

Dans notre cas le dernier reste non nul est R_2 et c'est la deuxième division $B = R_1Q_2 + R_2$ qui le contient.

On reporte cela dans $(*)$. On obtient

$$B - (A - BQ_1)Q_2 = R_2$$

D'où

$$(-Q_2)A + (1 + Q_1Q_2)B = R_2(**)$$

Et comme $D = \frac{1}{9}R_2$, alors en multipliant $(**)$ par $\frac{1}{9}$ on obtient:

$$(-\frac{1}{9}Q_2)A + \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2)B = D$$

Il vient qu'on a :

$$UA + VB = D$$

avec

$$\begin{cases} U &= -\frac{1}{9}Q_2 \\ V &= \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) \end{cases}$$

C-à-d:

$$\begin{cases} U &= -\frac{1}{9}Q_2 = \frac{1}{18}X - \frac{1}{6} \\ V &= \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) = -\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18} \end{cases}$$

Une deuxième rédaction

$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.

• On divise A par B ce qui donne:

$A = BQ_1 + R_1$ avec $Q_1 = X + 1$, $R_1 = -2X^3 - 10X^2 - 16X - 8$.

• Puis on divise B par R_1 ce qui donne:

$B = R_1Q_2 + R_2$ avec $Q_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ et $R_2 = 9X^2 + 27X + 18$.

• En dernier on divise R_1 par R_2 ce qui donne:

$R_1 = R_2Q_3$ avec $Q_3 = -\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}$.

On récapitule les trois divisions divisions obtenues:

$$\begin{cases} A &= BQ_1 + R_1 \\ B &= R_1Q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2Q_3 \end{cases}$$

Conclusion: $R_2 = 9X^2 + 27X + 18$ le dernier reste non nul donne le PGCD

$$D = X^2 + 3X + 2.$$

Remarquons que

$$R_2 = 9D.$$

On va utiliser les deux premières divisions pour trouver U et V vérifiant $UA + VB = D$.

• On commence par extraire R_2 à partir de la deuxième division $B = R_1Q_2 + R_2$ qui donne

$$B - R_1Q_2 = R_2$$

Ou autrement

$$B - R_1Q_2 = 9D \ (*)$$

Éliminons R_1 de $(*)$ en utilisant la première division.

• La première division $A = BQ_1 + R_1$ donne

$$R_1 = A - BQ_1.$$

On reporte cela dans $(*)$. On obtient

$$B - (A - BQ_1)Q_2 = 9D$$

D'où

$$(-Q_2)A + (1 + Q_1Q_2)B = 9D(**)$$

En divisant $(**)$ par 9 on obtient:

$$(-\frac{1}{9}Q_2)A + \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2)B = D$$

Il vient qu'on a :

$$UA + VB = D$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U & = & -\frac{1}{9}Q_2 \\ V & = & \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) \end{array} \right.$$

C-à-d:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U & = & -\frac{1}{9}Q_2 = \frac{1}{18}X - \frac{1}{6} \\ V & = & \frac{1}{9}(1 + Q_1Q_2) = -\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18} \end{array} \right.$$