Université Paris 7
MIASHS
Gr 4

DM 2 Algèbre

Exercice 1 Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:
$$f(x, y, z) = (2x, 2x + y - z, -2x + y + 3z).$$
Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.

2. (a) Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $(f - \lambda \cdot Id)$ ne soit pas bijective, et déterminer cette valeur λ.
   (b) Donner une équation de $H = \ker(f - \lambda \cdot Id)$ puis donner une base $\mathcal{N}$ de H.

3. (a) Le vecteur $u_2 = e_3 - e_2$ est-il dans l'image de $(f - 2 \cdot Id)$?
   (b) La famille $\mathcal{N}, u_2$ est-elle libre ?

4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, et $u_3 = e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.
   (c) Quelle est la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}'$?
   (d) Calculer C^n pour tout entier n.

5. On considère la matrice P formée des vecteurs colonnes u_1, u_2, u_3.
   (a) Calculer P^{-1} puis vérifier que $C = P^{-1}AP$.
   (b) Montrer que $A^n = PC^nP^{-1}$ pour tout entier n
   (c) Calculer A^n.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que pour tout $x \in Im(f)$ on a $x = f(x)$.
2. Montrer que: $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$ on a: $x - f(x) \in \ker(f)$.
4. Montrer que $E = \ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 3 Soient x_1, ..., x_n des réels deux à deux distincts. On considère l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est injective.
3. f est-elle surjective ? bijective ?
4. En déduire que pour tous réels $(x_1, \ldots, x_n)$ deux à deux distincts et $(y_1, \ldots, y_n)$ il existe un unique polynôme P tel qu'on ait $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.