Université Paris 7
MIASHS
Gr 4

DM 2 Algèbre

Exercice 1 Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (2x, 2x + y - z, -2x + y + 3z).$$

Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.

Réponse –

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $(f - \lambda \cdot Id)$ ne soit pas bijective, et déterminer cette valeur λ.

Réponse : $(f - \lambda \cdot Id)$ n'est pas bijective si et seulement si le déterminant de la matrice de $f - \lambda \cdot Id$ est nul si et seulement si $det(A - \lambda I) = 0$.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1]$$
$$= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2 - \lambda)(\lambda - 2)^2 = -(\lambda - 2)^3$$

$det(A - \lambda I) = 0$ si et seulement si $-(\lambda - 2)^3 = 0$ si et seulement si $\lambda = 2$.

$\boxed{(f - \lambda \cdot Id) \text{ n'est pas bijective si et seulement si } \lambda = 2}$.

(b) Donner une équation de $H = \ker(f - \lambda \cdot Id)$ puis donner une base $\mathcal{N}$ de H.

Réponse : • $Mat(f - \lambda \cdot Id) = Mat(f - 2 \cdot Id) = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$H = \ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^3; (f - 2 \cdot Id)(u) = 0\}$.

$$u = (x, y, z) \in H \text{ ssi } u \in \ker(f - 2 \cdot Id) \text{ ssi } (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \text{ ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ssi $2x - y - z = 0$.

D'où $\boxed{H : 2x - y - z = 0}$.

• $u = (x, y, z) \in H$ ssi $y = 2x - z$ ssi $(x, y, z) = (x, 2x - z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, -1, 1)$.

d'où $\boxed{\mathcal{N} = ((1, 2, 0), (0, -1, 1)) \text{ est une base de } H}$.

3. (a) Le vecteur $u_2 = e_3 - e_2$ est-il dans l'image de $(f - 2 \cdot Id)$?

Réponse : On remarque que $u_2 = e_3 - e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la troisième colonne de la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est la matrice de } (f - 2 \cdot Id).$$

Donc $u_2 = (f - 2 \cdot Id)(e_3)$, d'où u_2 est dans l'image de $(f - 2 \cdot Id)$.

(b) La famille $\mathcal{N}, u_2$ est-elle libre ?

Réponse : La famille $\mathcal{N}, u_2 = \{(1, 2, 0), (0, -1, 1), (0, -1, 1)\}$ est évidemment liée.

4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, et $u_3 = e_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Réponse : Il est clair que le pivot en colonne de la matrice $(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est déjà fait et de plus aucune colonne nulle, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de$\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.

Réponse : $f(u_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_1$.

$$\boxed{f(u_1) = 2u_1.}$$

$$f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_2.$$

$$\boxed{f(u_2) = 2u_2.}$$

$f(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a + b - c \\ -2a + b + 3c \end{pmatrix}$. Ce qui donne $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$.

$$\boxed{f(u_3) = u_2 + 2u_3.}$$

(c) Quelle est la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}'$?

Réponse : Par définition, la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}'$ est formée des colonnes coordonnées de $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

$f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = u_2 + 2u_3$. Donc :

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

(d) Calculer C^n pour tout entier n.

Réponse : En calculant $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $C^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ on peut conjecturer que

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Montrons que c'est vrai pour $n+1$, c-à-d

$$C^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

En effet: $C^{n+1} = C^n \cdot C = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + n2^{n-1} \cdot 2 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + n2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

5. On considère la matrice P formée des vecteurs colonnes u_1, u_2, u_3.

(a) Calculer P^{-1} puis vérifier que $C = P^{-1}AP$.

Réponse : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien :$C = P^{-1}AP$.

(b) Montrer que $A^n = PC^nP^{-1}$ pour tout entier n.

Réponse: D'abord $C = P^{-1}AP$, donne en multipliant à gauche par P, $PC = PP^{-1}AP = IAP = AP$, c-à-d $PC = AP$, ce qui donne en multipliant à droite par P^{-1}, $PCP^{-1} = APP^{-1} = AI = A$, donc

$$A = PCP^{-1}.$$

- D'où pour $n = 1$, on a $\boxed{A^1 = PC^1P^{-1}.}$
- $n \to n+1$. Supposons $A^n = PC^nP^{-1}$, montrons que $A^{n+1} = PC^{n+1}P^{-1}$.

En effet $A^{n+1} = A^nA = PC^nP^{-1}A = PC^nP^{-1}PCP^{-1} = PC^nICP^{-1} = PC^nCP^{-1} = PC^{n+1}P^{-1}$

(c) Calculer A^n.

Réponse : $A^n = PC^nP^{-1}$.

Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ -n2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}}$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire tel que $f \circ f = f$.

Remarquons d'abord que $f \circ f = f$ veut dire $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que pour tout $x \in Im(f)$ on a $x = f(x)$.

Réponse : Soit $x \in Im(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Or $f(f(y)) = f(y)$; puisque $f(y) = x$ il vient que $f(x) = x$

2. Montrer que: $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

Réponse : Pour montrer que $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ il faut montrer deux inclusions: $\{0\} \subset \ker(f) \cap Im(f)$ et $\ker(f) \cap Im(f) \subset \{0\}$.

$\{0\} \subset \ker(f) \cap Im(f)$ est trivial puisque $0 \in \ker(f)$ et $0 \in Im(f)$.

Reste à montrer $\ker(f) \cap Im(f) \subset \{0\}$.

Et pour le montrer on prouve par exemple que si $x \in \ker(f) \cap Im(f)$ alors $x = 0$.

En effet, soit $x \in \ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = 0$, or $f(f(x)) = x$, donc $f(0) = x$, d'où $x = 0$ (puisque $f(0) = 0$).

3. Montrer que pour tout $x \in E$ on a: $x - f(x) \in \ker(f)$.

Réponse : $f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$ (puisque $f(f(x)) = f(x)$), d'où $f(x - f(x)) = 0$, ce qui veut dire que $x - f(x) \in \ker(f)$.

4. Montrer que $E = \ker(f) \oplus Im(f)$.

Réponse : On vient de montrer que $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. Il reste à montrer que $\ker(f) + Im(f) = E$.

Pour cela il faut montrer deux inclusions: $\ker(f) + Im(f) \subset E$ et $E \subset \ker(f) + Im(f)$.

La première $\ker(f) + Im(f) \subset E$ est triviale puisque $\ker(f)$ et $Im(f)$ sont des s-e-v de E, donc leur somme $\ker(f) + Im(f)$ est un s-e-v de E, d'où $\ker(f) + Im(f)$ est une partie de E.
Montrons maintenant que $E \subset \ker(f) + Im(f)$.

Pour le montrer on prouve par exemple que si $x \in E$ alors x peut s'écrire comme la somme d'un élément de $\ker(f)$ et d'un élément de $Im(f)$.

En effet, $x = x - f(x) \; + \; f(x)$, or d'après la question précédente $x - f(x) \in \ker(f)$ et trivialement $f(x) \in Im(f)$.

Exercice 3 Soient x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts. On considère l'application

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.

Réponse :
- $f(P+Q) = ((P+Q)(x_1), \dots, (P+Q)(x_n)) = (P(x_1)+Q(x_1), \dots, P(x_n)+Q(x_n)) = (P(x_1), \dots, P(x_n)) + (Q(x_1), \dots, Q(x_n)) = f(P) + f(Q)$.
- $f(\lambda P) = ((\lambda P)(x_1), \dots, (\lambda P)(x_n)) = (\lambda P(x_1), \dots, \lambda P(x_n)) = \lambda(P(x_1), \dots, P(x_n)) = \lambda f(P)$.

2. Montrer que f est injective.

Réponse : f injective ssi $\ker(f) = \{0\}$.

Soit $P \in \ker(f)$, montrons que $P = 0$.

En effet, supposons que $f(P) = 0$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $(P(x_1), \dots, P(x_n)) = 0$, ce qui donne $P(x_1) = 0$, …, $P(x_n)) = 0$. Donc on a un polynôme P de degré $n-1$ qui possède n racines distinctes, d'où P est le polynôme nul [1].

3. f est-elle surjective ? bijective ?

Réponse : f est injective, les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, donc f est surjective et bijective.

4. En déduire que pour tous réels $(x_1, \dots, x_n)$ deux à deux distincts et $(y_1, \dots, y_n)$ il existe un unique polynôme P tel qu'on ait $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Réponse : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ deux à deux distincts. f est surjective, donc pour tout $(y_1, \dots, y_n)$ il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = (y_1, \dots, y_n)$, ce qui veut dire $P(x_1) = y_1$, …, $P(x_n) = y_n$.

[1] Th: si un polynôme P de degré $n-1$ possède n racines distinctes alors $P = 0$.