Université Paris 7
MIASHS
Gr 4

Un corrigé du DM 2 d'Analyse

Exercice 1 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\cos(x)$.

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\left|f(x) - x + \frac{x^3}{2}\right| \leqslant \frac{5x^4}{24}$$

Réponse : Il suffit d'utiliser Taylor-Lagrange à l'ordre 3. Pour cela on a besoin des 4 première dérivées de f.

$f'(x) = \cos(x) - x\sin(x),\ f''(x) = -2\sin(x) - x\cos(x),\ f'''(x) = -3\cos(x) + x\sin(x),$
$f^{(4)}(x) = 4\sin(x) + x\cos(x).$

$f'(0) = 1,\ f''(x) = 0,\ f'''(x) = -3.$

f est C^4 sur $[0,1]$, donc d'après Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0,1]$ il existe c entre 0 et x tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

C'-à-d $f(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{4!}(4\sin(c) + c\cos(c))$.

Donc $\left|f(x) - x + \dfrac{x^3}{2}\right| = \left|\dfrac{x^4}{4!}(4\sin(c) + c\cos(c))\right| \quad (*)$.

Or $|4\sin(c) + c\cos(c)| \underset{(1)}{\leqslant} |4\sin(c)| + |c\cos(c)| \leqslant 4|\sin(c)| + |c||\cos(c)| \underset{(2)}{\leqslant} 4 + |c| \underset{(3)}{\leqslant} 5.$

Ce qui donne $|4\sin(c) + c\cos(c)| \leqslant 5$ et donc

$$\left|\frac{x^4}{4!}(4\sin(c) + c\cos(c))\right| \leqslant \frac{5x^4}{4!} \quad (**)$$

L'inégalité $\underset{(1)}{\leqslant}$ est due au fait que $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Justification de l'inégalité $\underset{(2)}{\leqslant}$: $|\sin(c)|$ et $|\cos(c)|$ sont plus petits que 1, donc $4|\sin(c)| \leqslant 4$ et $|c||\cos(c)| \leqslant |c|$, d'où $4|\sin(c)| + |c||\cos(c)| \underset{(2)}{\leqslant} 4 + |c|$.

L'inégalité $\underset{(3)}{\leqslant}$ est due au fait que $|c|$ est plus petit que 1, puisque $0 < c < x \leqslant 1$.

En définitive, d'après $(*)$ et $(**)$ on a : $\left|f(x) - x + \dfrac{x^3}{2}\right| = \left|\dfrac{x^4}{4!}(4\sin(c) + c\cos(c))\right| \leqslant \dfrac{5x^4}{4!}$.

D'où
$$\left|f(x) - x + \frac{x^3}{2}\right| \leqslant \frac{5x^4}{4!}.$$

Exercice 2 Calculer les primitives et intégrales suivantes:

$$\int \frac{e^{1/t}}{t^3}dt, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)dx, \quad \int \frac{1}{x\,\ln^2(x)}dx.$$

Réponse : $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^3}dt$. Posons $x = 1/t$. Alors :

$$\begin{array}{c||c} x = 1/t & dx = -\frac{1}{t^2}dt \\ t = 1/x & dx = -x^2 dt \\ & dt = -\frac{dx}{x^2} \end{array}$$

Donc $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^3}dt = \int x^3 e^x \cdot (-\frac{dx}{x^2}) = -\int xe^x dx \underset{IPP}{=} (1-x)e^x + Cte = (1-1/t)e^{1/t} + Cte.$

$$\boxed{\int \frac{e^{1/t}}{t^3}dt = (1/t-1)e^{1/t} + Cte.}$$

Réponse : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)dx$. On pose $t = x^2$. Alors :

Remarquons pour la suite que par linéarisation $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

$$\begin{array}{c||c} t = x^2 & dt = 2xdx \\ x = \sqrt{t} & dt = 2\sqrt{t}dx \\ & dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)dx = \int_0^{\pi} \sqrt{t}\sin(t)\cos(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin(2t)dt = -\frac{1}{4}[\cos(2t)]_0^{\pi} = 0.$

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\cos(x^2)dx = 0.}$$

Réponse : $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\ln^2(x)}dx$. C'est une primitive du type: -$\displaystyle\int \frac{g'}{g^2}$ avec $g(x) = \ln(x)$.

Or : -$\displaystyle\int \frac{g'}{g^2} = \frac{1}{g}$. D'où :

$$\boxed{\int \frac{1}{x\,\ln^2(x)}dx = \frac{1}{\ln(x)}.}$$

Exercice 3 Calculer les primitives suivantes:

$$\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}\ , \quad \int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}.$$

Réponse : $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}dx.$

- Remarquons que $\alpha = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ est une racine de $x^2+x+1=0$.
- Décomposons en éléments simples: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}.$

•• $a = 1$;

•• c, d ? On multiplie par x^2+x+1 puis on remplace x par α.

$$\frac{x+1}{x^2} = cx + d + (x^2+x+1)(\cdots)$$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2} = c\alpha + d.$$

Après calculs: $\frac{\alpha+1}{\alpha^2} = -1$. Donc $-1 = c(-1/2+i\sqrt{3}/2)+d$, c-à-d $-1 = -c+d+ic\sqrt{3}/2$. Donc $c = 0$ et $d = -1$.

À ce stade on a : $\displaystyle\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{b}{x} - \frac{1}{x^2+x+1}.$

•• b ? Remplaçons x par -1. On a: $0 = 1 + b - 1$. Donc $b = 0$.

D'où : $\boxed{\displaystyle\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+x+1}.}$

Et $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{x} - \int \frac{1}{x^2+x+1}dx.$

Calculons $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx = \int \frac{1}{3/4[4/3(x+1/2)^2+1]}dx =$
$\displaystyle 4/3\int \frac{1}{[(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}}_{t})^2+1]}dx \underset{(*)}{=} 4/3\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{dt}{2/\sqrt{3}} = 2/\sqrt{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt =$
$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t) + Cte = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}) + Cte.$

L'égalité $(*)$ est obtenue en posant $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et donc on a : $dx = \frac{dt}{2/\sqrt{3}}$.

En définitive $\boxed{\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}) + Cte}.$

Réponse : $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx.$

Posons $t=\tan(x/2)$. Alors $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$.

$$t=\tan(x/2)\ \left\|\ \begin{array}{c} dt=(1+\tan^2(x/2))\frac{1}{2}dx \\ dt=(1+t^2)\frac{1}{2}dx \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right.$$

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx=\int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2}{t^2+2t+3}dt.$$

D'où : $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx=\int \frac{1+t^2}{t^2+2t+3}dt.$

$\displaystyle\frac{1+t^2}{t^2+2t+3}=1+\frac{c\,t+d}{t^2+2t+3}$. Pour ce cas simple, et pour trouver c et d il n'est pas nécessaire de multiplier puis remplacer...

En mettant au même dénominateur :
$\displaystyle\frac{1+t^2}{t^2+2t+3}=1+\frac{c\,t+d}{t^2+2t+3}=\frac{t^2+2t+3+c\,t+d}{t^2+2t+3}=\frac{t^2+(2+c)t+3+d}{t^2+2t+3}.$
Donc : $\displaystyle\frac{1+t^2}{t^2+2t+3}=\frac{t^2+(2+c)t+3+d}{t^2+2t+3}$, et par identification on a : $2+c=0$ et $3+d=1$, donc $c=d=-2$.
D'où : $\displaystyle\frac{1+t^2}{t^2+2t+3}=1-\frac{2t+2}{t^2+2t+3}.$
Ainsi $\displaystyle\int \frac{1+t^2}{t^2+2t+3}dt=\int\left(1-\frac{2t+2}{t^2+2t+3}\right)dt=$
$\displaystyle\int dt-\int \frac{2t+2}{t^2+2t+3}dt=t-\ln(t^2+2t+3).$

In fine : $\displaystyle\boxed{\int \frac{1}{2+\sin(x)+\cos(x)}dx=\tan(x/2)-\ln(\tan^2(x/2)+2\tan(x/2)+3)+Cte.}$