

Algèbre

Question de cours: – Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in \mathbb{R}$ soit une racine double de $P(X)$.

Exercice 1. – Calculer le PGCD $D \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes A et B définis ci-dessous.

$$A = X^4 + X^3 + X + 1 \text{ et } B = X^3 - X^2 + X - 1.$$

Exercice 2. – Donner la décomposition en éléments simples dans \mathbb{R} de la fraction:

$$\frac{X^2 - X + 1}{X(X^3 - X)}$$

Exercice 3. – Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on considère la suite (P_1, P_2, P_3) , où

$$P_1 = 1 + X, P_2 = X(X - 1), P_3 = (X - 1)(X - 2)$$

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées du polynôme X dans cette base ¹.

Exercice 4. – Déterminer $\lambda > 0$ pour que $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double. Quelle est l'autre racine ?

¹ C-à-d trouver les coordonnées a, b, c tels que $X = aP_1 + bP_2 + cP_3$