Université Paris 7
MIASHS Gr 4

Dst 1

Analyse

Question de cours: Énoncer le théorème des accroissements finis.

***Exercice* 1.** — On considère la fonction f définie par $f(x) = e^x + x^2 - 4$.

1. Vérifier que $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$ et $f(2) > 0$.
2. Montrer que l'équation
$$e^x + x^2 - 4 = 0$$
admet au moins deux solutions dans l'intervalle $[-2, 2]$.

***Exercice* 2.** — Soit $g(x) = x^4 + x + 1$ et les réels $a = 0$ et $b = 1$. Appliquer le théorème des accroissement fini à g sur l'intervalle $[a, b]$ et donner un réel c correspondant.

***Exercice* 3.** — Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{8}$, pour tout n.

1. Montrer que la suite (u_n) est positive.
2. Étudier la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{8}$.
3. Comparer u_1 et u_0, puis déduire de la question précédente que (u_n) est monotone.
4. Justifier que (u_n) est minorée, puis établir qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

***Exercice* 4.** — Soit $x \geqslant 0$. En appliquant le TAF à la fonction $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que
$$\sin(x) \leqslant x.$$