Université Paris 7
MIASHS Gr 4

Dst 2

Algèbre

***Exercice* 1.** — On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 4z,\ x - y + z,\ x + 2y + 4z).$$

et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire la dimension de $Im(f)$.
3. Donner un système d'équations, puis une base de $Im(f)$.
4. Montrer que $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. En déduire que $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$

***Exercice* 2.** — On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où m est dans $\mathbb{R}$.

1. Donner les réels m pour lesquels A_m est inversible.
2. Donner le rang de A_0.

***Exercice* 3.** — On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$g(P) = P - P'.$$

1. Calculer $g(1)$, $g(X)$ et $g(X^2)$, puis donner la matrice de g dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Montrer que g est injective. Justifier que g est bijective.
3. Donner la matrice de g^{-1} dans la base canonique $(1, X, X^2)$.