

Partiel du 5 Mars 2016

Durée : 1 heure 30 minutes.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 (8 points). Soit $P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$.

- (a) Calculer P' le polynôme dérivé de P .
- (b) Calculer le $\text{pgcd}(P, P')$.
- (c) En déduire que 1 est racine double de P .
- (d) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
- (e) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 (5 points). (a) Soit $F(X) = \frac{X^3+2X^2+X+1}{X^2+1}$, décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Soit $F(X) = \frac{5X^2-9X+3}{(X-2)^2(X+3)}$, décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 (8 points). Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

- (a) Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ?
- (b) En donner une base et calculer sa dimension.

On considère également $F = \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0))$.

- (c) Donner une base de F et calculer sa dimension.
- (d) Montrer que $F \subset E$.
- (e) Montrer que $F = E$.