Université Paris-Diderot Année 2015-2016
MIASHS - Analyse élémentaire II

Partiel du 5 mars 2016

Durée : 1 heure 30.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1 (9 points)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $g(x) = x^3 - 3x + 1$ est strictement décroissante sur $[0, 1/2]$

(b) En déduire que $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur $]0, 1/2[$.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.

(d) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

(e) En déduire que la suite (x_n) est croissante.

(f) Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 < x_n < 1/2$ pour tout $n > 0$.

(g) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 2 (3points)**.** Est ce qu'il existe une fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $f'(x) \leq 2$ pour tout $x \in [0, 2]$.

Exercice 3 (9points)**.** Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ C^1 telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

(a) En utilisant le fait que f' est continue montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| < \alpha$ pour tout $x \in [a, b]$.

(b) En déduire que $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$.

On dédinit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in [a, b]$.

(c) Montrer que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \alpha|u_{n+1} - u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) en déduire que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \alpha^{n+1}|u_1 - u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) En déduire que (u_n) est de Cauchy.

(f) En déduire que (u_n) converge vers $l \in [a, b]$.

(g) En déduire que l est un point fixe de f, c'est á dire que $f(x) = x$ admet une solution .

Exercice 4 (4points)**.** Soit $f(x) = e^x - x - cos(x)$ et $g(x) = x \sin(x)$.

(a) Faire un dévellopement limité de f et g à l'ordre 2 en 0.

(b) En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.