Université Paris 7 Mathématiques
DEUG SM, MIAS, MASS 2000-2001

LISTE D'EXERCICES

Gérard Bourdaud

Au lecteur

Cette liste d'exercices, rédigée il y a quelques années, recouvre dans ses grandes lignes l'actuel programme de la première année du DEUG MIAS. La majeure partie des exercices sont également utilisables dans le cadre des DEUG SM et MASS. Les exercices les plus difficiles sont signalés par la lettre "**Z**" (virage dangereux). Il est impossible de nommer ici tous les collègues qui ont contribué à la réalisation de cette liste. Le travail de l'"auteur" a consisté essentiellement à faire un choix dans les archives existantes, puis à tester les exercices dans ses propres travaux dirigés.

I- Langage Mathématique - Ensembles

1) Soit $A = \{2, 3, 4\}$. Traduire les énoncés suivants en français. Décider, quand cela est possible, s'ils sont vrais ou faux.

   a) $x \in A$
   b) $\forall x \in \mathbf{N}\ (x \in A)$
   c) $\exists x \in \mathbf{N}\ (x \in A)$
   d) $(x \in A) \Rightarrow (x \in \mathbf{N})$
   e) $\forall x\ ((x \in \mathbf{N}) \Rightarrow (x \in A))$
   f) $\exists x\ ((x \in A)\, et\, \forall y((y \in A) \Rightarrow (y \leq x)))$
   g) $\forall x \quad \forall x' \quad ((P(x)\, et\, P(x') \Rightarrow (x = x'))$,
   où $P(x) =\ (x \in A)\, et\, \forall y\ ((y \in A) \Rightarrow (y \leq x))$
   h) $\forall X\ ((X \subset \mathbf{N}) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}\ (\forall x\ ((x \in X) \Rightarrow (x \leq y))$
   i) $\exists x \in \mathbf{N}\ (\forall y \in \mathbf{N}\ (\exists z \in \mathbf{N}\ (y = 2z)) \Rightarrow (y \leq x))$
   j) $\forall x \in \mathbf{N}\ [(\exists y \in \mathbf{N}\ (x = 4y)) \Rightarrow \exists z \in \mathbf{N}\ (x = 2z)]$

2) Soit $A = \{2, 3, 4\}$. A partir des énoncés $x \in A$, $x \in \mathbf{N}$, $x = 2z + 1$, $x > 3$ en former d'autres qui expriment que

   a) A est non-vide
   b) x est un entier naturel impair
   c) A contient un entier naturel impair
   d) A ne contient aucun entier naturel impair supérieur à trois.

3) Soit E un ensemble de nombres. On considère les énoncés:

$$(\mathcal{E}) \quad \exists x \in E \quad \forall y \in E \quad (\, x + y = y\,)\,,$$

$$(\mathcal{E}') \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad (\, x + y = 0\,)\,.$$

   a) Donner la valeur de vérité de $(\mathcal{E})$ dans chacun des cas suivants: E est l'ensemble des entiers pairs, E est l'ensemble des entiers impairs.

b) Donner la valeur de vérité de $(\mathcal{E}')$ dans chacun des cas suivants: $E = \mathbf{N}$, $E = \mathbf{Z}$.

4) Prouver les tautologies

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \, et \, q) \Rightarrow r) \quad , \quad ((p \, ou \, q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \, et \, (q \Rightarrow r))$$

a) à l'aide d'un tableau de vérité à 8 lignes,

b) en utilisant les propriétés des connecteurs "et" et "ou" ainsi que la tautologie

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((non \, p) \, ou \, q) \, .$$

5) a) Montrer que l'énoncé

$$\forall x \; (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\, (\forall x \; P(x)) \Rightarrow (\forall x \; (Q(x)) \,)$$

est vrai indépendamment des prédicats donnés $P(x)$ et $Q(x)$.

b) Trouver des prédicats $P(x)$ et $Q(x)$ tels que

$$(\, (\forall x \quad P(x) \,) \Rightarrow (\forall x \quad Q(x) \,) \,) \quad \Rightarrow \quad \forall x \; (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

soit faux.

6) Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dans chacun des cas suivants:

$$E = \emptyset \, , \, E = \{0\} \quad , \quad E = \{0, 1\} \quad , \quad E = \{0, 1, 2\} \, .$$

7) Simplifier les expressions suivantes:

$$A \cup (A \cap B) \quad , \quad A \cap (A \cap B) \quad , \quad A \cup (A \cup B) \quad , \quad A \cap (A \cup B) \, .$$

8) Les énoncés suivants sont-ils vrais (les variables A, B, C désignent des sous-ensembles d'un ensemble donné E)?:

a) $\forall A \quad \forall B \quad \forall C \quad (\, (A \cup B = A \cup C) \; \Rightarrow \; (B = C) \,) \, ,$

b) $\forall A \quad \forall B \quad (\, (E \setminus A = E \setminus B) \; \Rightarrow \; (A = B) \,) \, .$

9) x, y étant deux objets, on considère l'ensemble

$$E_{x,y} = \{\{x\}, \{x, y\}\} \, .$$

Montrer l'équivalence

$$(E_{x,y} = E_{x',y'}) \quad \Leftrightarrow \quad ((x = x') \, et \, (y = y')) \, .$$

(Remarque: en Théorie Axiomatique des Ensembles, c'est ainsi qu'on définit le *couple* (x, y) à partir de la *paire* $\{x, y\}$).

II- Applications - Combinatoire

10) On considère les correspondances suivantes, où X désigne l'ensemble de départ, Y l'ensemble d'arrivée et R le graphe. Lesquelles sont fonctionnelles? Les fonctions ainsi définies sont-elles surjectives? injectives?

 a) $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 = y^2\}$
 b) $X = [0, \infty[$, $Y = \mathbf{R}$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 = y^2\}$
 c) $X = \mathbf{R}$, $Y = [0, \infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 = y^2\}$
 d) $X = [0, \infty[$, $Y = [0, \infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 = y^2\}$
 e) $X = \mathbf{R}$, $Y = [0, \infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 + y^2 = 1\}$
 f) $X = [-1, 1]$, $Y = [0, \infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; x^2 + y^2 = 1\}$
 g) $X = [-\pi/2, \pi/2]$, $Y = [-\pi/2, \pi/2]$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; \sin x = \cos y\}$
 h) $X = [-\pi/2, \pi/2]$, $Y = [0, \pi/2]$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \; : \; \sin x = \cos y\}$

11) Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Comparer les ensembles:

 a) $[0, 1]$ et $f^{-1}\left(f([0, 1])\right)$,
 b) $[-1, +1]$ et $f\left(f^{-1}([-1, +1])\right)$,
 c) $f\left([0, 1] \cap [-1, 0[\right)$ et $f\left([0, 1]\right) \cap f([-1, 0[)$.

12) Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle $f(x) = \cos x$. Décrire les ensembles suivants:

$$f([-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}]) \quad f^{-1}\left(f([-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}])\right) \quad f^{-1}(]1, +\infty[) \quad f\left(f^{-1}(]1, +\infty[)\right)$$

$$f^{-1}([1, +\infty[) \quad f\left(f^{-1}([1, +\infty[)\right) \quad f^{-1}([1/2, +\infty[) \quad f\left(f^{-1}([1/2, +\infty[)\right) .$$

13) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application telle que $f(x) = (x^2 - 1)^2$ quel que soit $x \in \mathbf{R}$.

 a) Etudier f et tracer sommairement son graphe.
 b) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}$: $f^{-1}(]-1, +\infty[)$,

$$f\left(f^{-1}(]-1, +\infty[)\right) \, , \, f([\sqrt{2}, +\infty[) \, , \, f^{-1}\left(f([\sqrt{2}, +\infty[)\right)$$

14) Soit X , Y et Z des ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications.

 a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
 b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

15) On considère l'application $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ telle que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

 a) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
 b) Déterminer des intervalles $I \subset]0, +\infty[$ et $J \subset \mathbf{R}^+$ tels que la restriction de f soit une bijection de I sur J.

16) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x-y, -2x+2y)$.

   a) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que $(a,b) \in f(\mathbf{R}^2)$ si et seulement si $2a+b=0$.
   b) L'application f est-elle surjective? injective?

17) Montrer que l'application $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}^\star$ telle que $f(n,m) = 2^n(2m+1)$ est une bijection.

18) Soit $A = \{\,(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \,:\, |m| \leq n\,\}$. On définit l'application $f : A \to \mathbf{N}$ par $f(n,m) = n^2 + n + m$.

   a) Démontrer que f est une bijection ; trouver $f^{-1}(1000)$.
   b) Construire une bijection de A sur $\mathbf{N}^2$.

19) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, on considère l'énoncé $P(n)$ suivant: n est la somme de deux carrés de nombres entiers.

   a) Ecrire $P(n)$ à l'aide de quantificateurs.
   b) Trouver un entier n tel que $P(n)$.
   c) Trouver un entier n tel que *non* $P(n)$.
   d) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers tels que $P(n)$.
   e) Soit n un entier tel que $P(n)$. Calculer le reste de la division de n par 4 . De ce qui précède, déduire qu'il existe une infinité d'entiers tels que *non* $P(n)$.

20) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} j(j+1) = 1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1)\,.$$

Montrer, par récurrence sur n, l'égalité

$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

21) Montrer par récurrence la propriété

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,,$$

quel que soit l'entier $n \geq 1$.

22) Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et $f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ l'application telle que $f(A,B) = A \cap B$. Quel sont les cardinaux des ensembles: $f^{-1}(\{\emptyset\})$, $f^{-1}(\{\{1,2,3,4\}\})$, $f^{-1}(\{\{1,2,3\}\})$, $f^{-1}(\{\{1,2\}\})$?

23) **(Z)** Soit E un ensemble, A et B deux parties de E telles que

$$E = A \cup B \quad , \quad A \cap B = \emptyset\,.$$

a) Montrer que l'application $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par

$$\forall X \quad \forall Y \quad f(X,Y) = X \cup Y$$

est une bijection et déterminer la bijection réciproque f^{-1}.

b) En déduire la formule

$$C_{p+q}^{r} = \sum_{j=0}^{p} C_p^j C_q^{r-j} \quad (p \leq r \leq q)\,.$$

24) Soit $f : E \to F$ une application. Montrer les équivalences suivantes:

a) f injective $\quad\Leftrightarrow\quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$,
b) f surjective $\quad\Leftrightarrow\quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad F \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

25) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère l'ensemble A_n des couples $(x,y) \in \mathbf{N}^2$ tels que $x + 2y = n$. Calculer le cardinal de A_n.

26) Calculer

$$\sum_{p=1}^{n} pC_n^p\,.$$

27) Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. On considère le sous-ensemble suivant de E :

$$A = \{x \in E \,:\, x \notin f(x)\}\,.$$

Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $A = f(a)$. En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

III- Nombres complexes

28) Mettre sous la forme $x + iy \quad (x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$ les nombres complexes suivants:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad , \quad \frac{7-3i}{1+3i} \quad , \quad \frac{a}{a+ib} \quad , \quad \frac{a+ib}{b+ia} \; (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})\,.$$

29) Mettre sous la forme $re^{i\theta} \quad (r \geq 0, \theta \in \mathbf{R})$ les nombres complexes suivants:

$$-3\,,\; -1+i\sqrt{3}\,,\; 2-2i\,,\; \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\,,\; \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}\,,$$

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \quad (-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2})\,,\; e^{it}+e^{is}\,,\; \frac{e^{it}+e^{is}}{e^{it}-e^{is}} \quad (s \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R})\,.$$

30) a) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^3}$ (Suggestion: on commencera par déterminer le *module* de z).

b) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^4 = z + \overline{z}$ (Suggestion: on commencera par déterminer l'*argument* de z).

31) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants:

$$-3+4i \quad , \quad 1+4i\sqrt{3} \quad , \quad 1+i \quad , \quad 1-i\sqrt{3} \quad , \quad \frac{1+i}{1-i}.$$

32) Soit $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$ l'application telle que $f(z) = \dfrac{z^2}{1-z}$ pour tout $z \neq 1$.

a) Déterminer les sous-ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-4\})$, $f^{-1}(\{3i\})$.

b) Soit $u \in \mathbf{C}$. Combien l'ensemble $f^{-1}(\{u\})$ a-t-il d'éléments?

c) L'application f est-elle injective? Est-elle surjective?

33) Calculer les racines cubiques de $2 + 11i$.

34) a) Trouver les nombres complexes z tels que $z^3 + 1 = 0$. (On les donnera sous la forme $\rho e^{i\theta}$ *et* sous la forme $x + iy$.)

b) On considère l'équation

$$z^2 + \overline{z} = 0\,.$$

Soit z un nombre complexe *non nul* solution de cette équation; montrer que z est de module 1. Trouver toutes les solutions de l'équation.

35) Trouver toutes les solutions $z \in \mathbf{C}$ de l'équation

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

36) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{C}$:

$$z^2 - (2+i)z + (i+7) = 0 \quad , \quad z^2 - iz - (1+i) = 0\,,$$

$$(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0 \quad , \quad z^2 + (2-4i)z - (3+4i)\,.$$

37) Soit z une racine n-ième de l'unité. Calculer $S_n = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$ (Suggestion: multiplier S_n par $1-z$).

38) Soit ω_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ les n racines n-ièmes de l'unité. Montrer qu'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m = 0$$

sauf si l'entier m est un multiple de n.

39) L'entier positif n étant donné, résoudre les équations suivantes:

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad , \quad (z+i)^n = z^n\,.$$

40) **(Z)** a et h étant des nombres réels et n un entier ($n \geq 1$), on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) \quad , \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)\,.$$

Calculer le nombre complexe $S_n + iT_n$; en déduire les formules suivantes:

$$S_n = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cos\left(a + \frac{(n-1)h}{2}\right) \quad , \quad T_n = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(a + \frac{(n-1)h}{2}\right)\,.$$

41) On considère l'application $f : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$ telle que

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}\,.$$

a) Montrer qu'on a $f(\mathbf{C} \setminus \{1\}) = \mathbf{C} \setminus \{1\}$.
b) On considère l'application $h : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C} \setminus \{1\}$ telle que $h(z) = f(z)$, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. Montrer que h est une bijection et déterminer la bijection réciproque h^{-1}.
c) Exprimer le nombre réel $1 - |h(z)|^2$ à l'aide de $|z|$ et de $\Re z$.
d) On considère le *disque unité*

$$D = \{\, z \in \mathbf{C} \,:\, |z| < 1 \,\}\,.$$

A l'aide de la question précédente, déterminer $h^{-1}(D)$ et $h(D)$.

42) Le nombre complexe z étant donné, on considère les points A, B, C d'affixes respectifs i, z, iz. Déterminer les nombres z pour lesquels:

a) les points A, B, C sont alignés,
b) le triangle ABC est équilatéral.

43) Soit f l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ telle $f(z) = z^2 + z + 1$.

a) L'application f est-elle surjective? injective? Quels sont les éléments de $\mathbf{C}$ *invariants* par f (autrement dit ceux qui vérifient $f(z) = z$)? Décrire l'ensemble $f^{-1}(\mathbf{R})$.
b) On considère les points A, M, M' d'affixes respectifs $1, z, f(z)$. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels A , M et M' sont alignés.

IV- Algèbre linéaire

Notation: Si $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on note $\mathbf{K}_n[X]$ le s.e.v. de $\mathbf{K}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

44) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$.

a) A quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?

b) En supposant que w *n'est pas* proportionnel à v , montrer que tout vecteur de $\mathbf{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

45) Mêmes questions dans $\mathbf{C}^2$ pour les vecteurs $v = (i, i-1)$ et $w = (-1, k)$, où k est un paramètre complexe.

46) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$.

a) A quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?

b) On suppose que w *n'est pas* proportionnel à v et l'on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ ax + by + cz = 0 \,\},$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tout les trois nuls, que l'on déterminera.

47) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, $v_3 = (3, b, -1)$.

a) A quelle condition sur le paramètre b le vecteur v_3 est-il une combinaison linéaire de v_1 et v_2?

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que v_1 est une combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison linéaire de v_1 et v_3 .

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ est une combinaison linéaire de v_1 , v_2 et v_3 .

48) Mêmes questions dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_2[X]$ pour les polynômes

$$P_1(x) = (x-1)^2 \quad , \quad P_2(x) = (2x+1)^2 \quad , \quad P_3(x) = ux + 3 \,,$$

où u est un paramètre réel.

49) Dans $\mathbf{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non mutuellement proportionnels, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

50) Soit a, b deux nombres complexes tels que $a^2 + 4b = 0$. Soit S l'ensemble des suites $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n \,.$$

Montrer que les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = (\frac{a}{2})^n \quad et \quad v_n = n(\frac{a}{2})^n$$

appartiennent à S et que toute suite appartenant à S est une combinaison linéaire de u et v.

51) a) Déterminer toutes les suites $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad w_{n+2} = (i-1)w_{n+1} + iw_n \,.$$

b) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres *réels* telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n \quad et \quad w_0 = 1 \quad et \quad w_1 = -1\,.$$

52) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ on considère les éléments c, s, u, v, w définis par

$$c(x) = \cos x\,,\ s(x) = \sin x\,,\ u(x) = \cos 2x\,,\ v(x) = 1\,,\ w(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})\,,$$

quel que soit le réel x.

a) Montrer que s n'est pas proportionnel à c .

b) Montrer que v n'est pas une combinaison linéaire de c et s (Indication: raisonner par l'absurde et donner diverses valeurs à la variable x).

c) Est-ce-que u est une combinaison linéaire de c et s ? Même question pour w.

53) Dans cet exercice, on considère $\mathbf{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ (cela signifie que les "scalaires" sont exclusivement des nombres rationnels).

a) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.

b) Soit x, y deux rationnels tels que $x + y\sqrt{2} \neq 0$. Montrer que le nombre réel

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}}$$

est une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$.

c) Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de 1 et $\sqrt{2}$. Montrer que $\mathbf{K}$ est un corps pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles.

54) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels:

$$E_1 = \{\,(x,y)\,:\,2x - y = 0\,\} \quad , \quad E_2 = \{\,(x,y)\,:\,2x - y = 1\,\}$$

$$E_3 = \{\,(x,y)\,:\,x^2 - y^2 = 0\,\} \quad , \quad E_4 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\,?$$

55) Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-il des sous-espaces vectoriels?

$$E_1 = \{\, f \,:\, f(0) = 1 \,\}\,,\ E_2 = \{\, f \,:\, f(1) = 0 \,\}\,,\ E_3 = \{\, f \,:\, f(1) = 2f(0) \,\}\,,$$

$$E_4 = \{\, f \,:\, f(1) = f(0) + 2 \,\} \quad , \quad E_5 = \{\, f \,:\, (\forall x \in \mathbf{R})\, f(x) \leq 0 \,\}$$
$$E_6 = \{f \,:\, f' + f = 0\} \quad , \quad E_7 = \{f \,:\, f' + f = 1\}$$

et enfin l'ensemble E_8 des polynômes de degré 3.

56) Déterminer l'image et le noyau de chacune des applications linéaires suivantes:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x - 3y \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x - 2y, 3x - 6y) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \to & \mathbf{C}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (ix - y, x + iy) \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x + 5y, x - 2y, 2x - y) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x + 5y - z, -x + 2y - 2z) \end{array} .$$

57) Rappelons que $\mathbf{C}^n$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{C}$ (espace vectoriel complexe) ou sur le corps $\mathbf{R}$ (espace vectoriel réel).

a) Pour les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}^2$ on indiquera s'il s'agit de sous-espaces vectoriels réels ou complexes:

$$E_1 = \{\, (z, z') \,:\, iz - z' = 0 \,\} \quad , \quad E_2 = \{\, (z, z') \,:\, i\overline{z} - z' = 0 \,\}\,,$$

$$E_3 = \{\, (z, z') \,:\, |z|^2 + |z'|^2 = 1 \,\}\,.$$

b) Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application $\mathbf{R}$-linéaire. Montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad f(z) = az + b\overline{z}\,.$$

A quelle condition f est-elle une application $\mathbf{C}$-linéaire?

58) Pour chacune des suites de vecteurs suivantes, dans les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, on indiquera s'il s'agit d'un suite libre, génératrice, d'une base; si on montre que la suite est liée, on donnera une relation linéaire explicite entre les v_j. Le cas échéant, on devra discuter suivant le paramètre m.

a) $v_1 = (2,3,4)$, $v_2 = (-1,-5,-7)$, $v_3 = (3,1,1)$,
b) $v_1 = (1,-1,i)$, $v_2 = (-1,i,1)$, $v_3 = (i,1,-1)$,
c) $v_1 = (1,2,-1,0)$, $v_2 = (4,5,0,1)$, $v_3 = (2,1,2,1)$,
d) $v_1 = (1,-1,2,4)$, $v_2 = (0,3,-1,5)$, $v_3 = (-1,0,2,6)$,
e) $v_1 = (4,3,3,6)$, $v_2 = (1,1,-1,-2)$, $v_3 = (4,2,10,m)$,
f) $v_1 = (1,2,-1,-2)$, $v_2 = (2,3,0,-1)$,
$v_3 = (1,3,-1,0)$, $v_4 = (1,2,1,m)$.

59) Dans $\mathbf{C}^2$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, i)$, $v_2 = (i-1, 1)$, $v_3 = (-2, 2-i)$.

a) Sans faire de calcul montrer que la suite (v_1, v_2, v_3) est liée, puis donner une relation linéaire explicite entre les v_j.

b) On considère maintenant $\mathbf{C}^2$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Déterminer une base de $\mathbf{C}^2$ ainsi que les coordonnées des v_j dans cette base. Montrer que la suite (v_1, v_2, v_3) est libre.

60) Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}^3$:

a) $E = \{ (x, y, z) \,:\, x + y - z = 0 \}$,

b) $F = \{ (x, y, z) \,:\, x + 2y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y = 0 \}$,

c) $G = \{ (x + y, 2x + 2y, -x + 3y) \,:\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \}$.

61) Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}_2[X]$:

a) $E = \{ p \,:\, p(0) + p'(0) = 0 \quad \text{et} \quad p(1) - p'(1) = 0 \}$,

b) $F = \{ p \,:\, \forall x \in \mathbf{R} \quad x^2 p''(x) + x p'(x) - 2p(x) = 0 \}$.

62) On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ constitué par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a + b & -b \\ a + 2b & a \end{pmatrix} ,$$

où (a, b) parcourt $\mathbf{R}^2$. Déterminer une base de E.

63) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$, on considère la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) , où

$$p_1(x) = (1 - x)^3 \,,\; p_2(x) = x(1 - x)^2 \,,\; p_3(x) = x^2(1 - x) \,,\; p_4(x) = x^3 \,.$$

Calculer les coordonnées de p_j dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$; en déduire que la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

64) **(Z)**

a) Soit $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ une suite de polynômes sur $\mathbf{R}$ telle que p_j soit de degré j . Montrer que cette suite est une base de l'espace $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On se propose de calculer les coordonnées du polynôme $p \in \mathbf{R}_n[X]$ dans la base $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, où

$$p_j(x) = (x - a)^j \quad (j = 0, 1, \ldots, n) \,.$$

En dérivant k fois la relation

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j (x - a)^j \,,$$

montrer qu'on a

$$\lambda_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

(La formule obtenue s'appelle *formule de Taylor pour les polynômes*).

65) Donner le rang de chacune des suites de vecteurs étudiées dans l'exercice 58 .

66) Discuter suivant le paramètre m le rang de la suite de vecteurs

$$v_1 = (m, 1, 1, 1)\,,\ v_2 = (1, m, 1, 1)\,,\ v_3 = (1, 1, m, 1)\,,\ v_4 = (1, 1, 1, m)\,.$$

67) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (2, -2, 3, 1) \quad , \quad v_2 = (-1, 4, -6, -2)\,.$$

Trouver deux vecteurs v_3, v_4, appartenant à la base canonique de $\mathbf{R}^4$, tels que (v_1, v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

68) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.
b) Déterminer des bases de E et de F .

69) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$(1, -1, 2, 3) \quad , \quad (1, 1, 2, 0) \quad , \quad (3, -1, 6, -6)$$

et F le sous-espace engendré par

$$(0, -2, 0, -3) \quad , \quad (1, 0, 1, 0)\,.$$

Trouver des bases de $E, F, E \cap F, E + F$. E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$?

70) Soit E l'ensemble des $(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbf{C}^{2n}$ tels que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ et F l'ensemble des $(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbf{C}^{2n}$ tels que $x_k = x_{n+k}$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{C}^{2n}$.

71) Soit E_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$?

72) Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ engendrés respectivement par $\{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$ et $\{(0, 6, -1, 4), (3, 3, 1, 5)\}$.

a) Caractériser $E_1 \cap E_2$.
b) Donner une base de $E_1 + E_2$.
c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

73) **(Z)** On appelle *matrice magique* d'ordre n toute matrice $A = (a_{j,k}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telle que les sommes des éléments de chaque colonne, de chacune ligne et de chacune des deux diagonales soit égales à un même nombre, qu'on appelle la *somme* de la matrice magique. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices magiques.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.

b) Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices magiques de *somme nulle* et par $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices *constantes*, autrement dit des matrices dont tous les coefficients sont égaux. Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

c) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{N}$, on considère les sous-ensembles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ constitués respectivement des matrices (magiques de somme nulle):

- *symétriques* (celles qui vérifient $a_{jk} = a_{kj}$ pour tout couple (j,k)),
- *antisymétriques* (celles qui vérifient $a_{jk} = -a_{kj}$ pour tout couple (j,k)).

Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{N}$.

d) On suppose désormais $n = 3$. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$. En déduire la matrice magique d'ordre 3 la plus générale.

74) Déterminer tous les polynômes $p \in \mathbf{R}_2[X]$ tels que $p(1) = 2$; montrer qu'il en existe un seul qui soit une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

75) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ telle que

$$f(10,1,2,0) = 1\,,\; f(1,2,1,0) = 2\,,\; f(2,0,1,1) = 3\,,\; f(0,0,0,2) = 4\,.$$

Calculer $f(1,1,1,1)$.

76) Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,0,-3)$, $v_3 = (0,2,5)$.

a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire f, de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, telle que $f(v_j) = e_j\ (j = 1,2,3)$.

b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications linéaires f, de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, telles que

$$f(v_1) = e_1 \quad , \quad f(v_2) = e_2 \quad , \quad f(v_3) = 2e_1 - e_2$$

(Suggestion: on observera qu'il y a une infinité de manière de compléter (v_1, v_2) de façon à obtenir une base de $\mathbf{R}^3$).

77) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du vecteur $(2,-1)$.

b) On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}_1[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du polynôme $p(x) = 3x + 4$.

78) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rlll} f(e_1) = & e_1 & +2e_2 & \\ f(e_2) = & e_1 & +6e_2 & +2e_3 \\ f(e_3) = & e_1 & & -e_3 \end{array} \right.$$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Déterminer les sous-espaces vectoriels $Ker\, f$ et $Im\, f$.

79) On considère l'application $u : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ telle que, pour tout $p \in \mathbf{R}_3[X]$, $u(p)$ soit le polynôme $x \mapsto p(x+1) - p(x)$.

a) Montrer que u est application linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
b) Déterminer les sous-espaces vectoriels $Ker\, u$ et $Im\, u$.
c) Plus généralement déterminer les sous-espaces $Ker\, u^k$, pour $k \in \mathbf{N}^*$.

80) Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

81) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un projecteur. On déterminera l'image et le noyau de f.

82) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie. On déterminera les sous-espaces $Ker(f - Id)$ et $Ker(f + Id)$.

83) Calculer les inverses des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

84) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

a) Calculer A^4.
b) Montrer que A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
c) On suppose $a \neq 0$. Calculer A^{-1}, puis A^n pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$.

85) Dans $\mathbf{R}^4$ on considère la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et la suite

$$\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^4$. Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.
b) Soit $v = (1, -1, 3, -2)$. Calculer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.
c) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, sont: $-2, 0, 4, 1$.

86) Ecrire les matrices, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ des endomorphismes suivant:

a) le projecteur sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement au vecteur $(1, 1, -1)$.
b) la symétrie par rapport au vecteur $(1, 2, -1)$, parallèlement au plan d'équation $x + 3y - z = 0$.

87) Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (0, 1, -1)\,,\ u_2 = (-1, -1, 3)\,,\ u_3 = (1, 0, -1)$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ représenté, dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, par la matrice A.

a) Montrer que le système $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Déterminer la matrice de changement de base P de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$ et la matrice de changement de base Q de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_0$.

b) Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

c) Trouver trois matrices X,Y et Z telles que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A^n = X + nY + 2^n Z\,.$$

d) Dans l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3, on considère le sous-espace E engendré par les matrices A^n $(n \geq 0)$. Déterminer une base de E; en déduire la dimension de E .

88) On considère l'endomorphisme f_a de $\mathbf{R}^3$ représenté, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Discuter suivant le paramètre a, le rang de f_a.

b) Déterminer le noyau et l'image de f_a.

89) **(Z)** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

a) Montrer que $Im\, f$ est inclus dans $Ker\, f$; en déduire le rang de f.

b) Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $e_1 \in Ker\, f$ non proportionnel à e_2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

c) Application numérique: soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f satisfait les hypothèses ci-dessus. Choisir les vecteurs e_3 et e_1 et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_1, e_3).

90) **(Z)** On se propose de préciser les résultats de l'exercice 76 , dont on reprend les notations. Soit $\varphi : \mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ l'application telle que $\varphi(f) = (f(v_1), f(v_2))$.

a) Montrer que φ est une application linéaire surjective; en déduire la dimension de $Ker\, \varphi$.

b) Déterminer une base de $Ker\,\varphi$ et décrire l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(f) = (e_1, e_2)$.

91) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_3, e_2, e_1)$.
Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

92) Soit $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + 4z, x + y + 3z + t, 3x + 2y + 7z + t, x - y - z - 3t)\,.$$

a) Trouver une base du sous-espace $Ker\,f$; quelle est sa dimension?

b) Trouver une base et des équations du sous-espace $Im\,f$; quelle est sa dimension?

c) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. Montrer que l'on a $E \oplus Ker\,f = \mathbf{R}^4$.

d) Soit $g : E \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que g est injective et que l'on a $Im\,g = Im\,f$.

93) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1, -1)$ et $v = (-1, 2)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

b) Calculer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ ainsi qu'une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = M$.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la matrice M^n; en déduire A^n.

d) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que

$$u_0 = a \quad , \quad v_0 = b \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lll} u_{n+1} = & \frac{5}{2}u_n & +v_n \\ v_{n+1} = & -2u_n & -\frac{1}{2}v_n \end{array}\right. \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Calculer u_n et v_n à l'aide de n, a et b.

94) Pour chacune des matrices A_k suivantes, on déterminera son rang r, ainsi que des matrices inversibles P, Q telles que

$$PA_kQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

95) **(Z)** Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, de dimension finie.

a) Montrer les inclusions $Ker\, f \subset Ker\, f^2$, $Im\, f^2 \subset Im\, f$.

b) Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes:

$$(1)\, Ker\, f^2 \subset Ker\, f \quad (2) Im\, f \subset Im\, f^2 \quad (3) Ker\, f \cap Im\, f = \{0\}.$$

Montrer que si l'une de ces conditions est satisfaite, les sous-espaces $Ker\, f$ et $Im\, f$ sont supplémentaires.

96) **(Z)** Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, de dimension finie n. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes:

a) $Ker\, f = Im\, f$,

b) $(f^2 = 0)$ et (n pair) et $(rg\, f = \frac{n}{2})$.

97) **(Z)** Soit $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ défini par:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \; : \; (a,b,c) \in \mathbf{C}^3 \right\}.$$

a) On considère les matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ dont la famille (I, J, J^2) est une base.

(ii) Après avoir calculé J^3, déduire du (i) que les matrices de $\mathcal{L}$ commutent deux à deux:

$$\forall (A,B) \in \mathcal{L}^2 \qquad AB = BA.$$

b) Soit j une racine complexe cubique non réelle de l'unité. On admettra — ou mieux on démontrera — que $1 + j + j^2 = 0$. On note $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) telle que

$$v_1 = (1,1,1) \quad , \quad v_2 = (1, j, j^2) \quad , \quad v_3 = (1, j^2, j).$$

(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{C}^3$; on notera P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^4.

(ii) Ecrire J et J^2 dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la forme des éléments de $\mathcal{L}$ dans cette nouvelle base.

98) **(Z)** A toute matrice $A = (a_{kj})$, carrée d'ordre n, on associe le nombre

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \,,$$

qu'on appelle la *trace* de la matrice A.

a) Démontrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$.
b) Calculer $tr(I_n)$.
c) Montrer l'égalité $tr(AB) = tr(BA)$, pour toutes matrices A, B.
d) Montrer qu'il est impossible de trouver deux matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$.
e) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible. Montrer qu'on a $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$, quelle que soit la matrice A.

99) **(Z)**

a) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E. On suppose que F et G sont de même dimension. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ des bases respectives de F et G. Montrer que le système $(e_1 + e'_1, \ldots, e_p + e'_p)$ est libre et qu'il engendre un sous-espace H de E, qui est un supplémentaire commun à F et G.
b) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. On suppose que F et G sont de même dimension. On considère un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F et un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G. En appliquant le a) aux sous-espaces F', G' de l'espace vectoriel $F' \oplus G'$, montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.
c) Application numérique. Soit $E = \mathbf{R}^4$, F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(-1, 4, 3, 2)$ et $(0, 3, -4, 1)$, G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, -1, -2, 5)$ et $(0, 6, -3, 4)$. Construire un supplémentaire commun à F et G.

100) **(Z)** Soit p et q deux projecteurs de l'espace vectoriel E.

a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Montrer que, dans ce cas, on a

$$Im\,(p+q) = Im\,p \oplus Im\,q \quad , \quad Ker\,(p+q) = Ker\,p \cap Ker\,q \,.$$

101) **(Z)** Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E, tel que

$$(u - Id_E) \circ (u - 3Id_E) = 0 \,.$$

On suppose que u *n'est pas* une homothétie. On pose

$$p = \frac{1}{2}(u - Id_E) \quad , \quad q = \frac{1}{2}(3Id_E - u)$$

et on désigne par $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par (p, q).

a) Montrer que p et q sont des projecteurs.
b) Montrer que (p, q) est une base de $\mathcal{V}$.
c) Montrer que u et Id_E appartiennent à $\mathcal{V}$.
d) Montrer que $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{V}$ implique $f \circ g \in \mathcal{V}$.
e) Montrer que u est un automorphisme et que u^{-1} appartient à $\mathcal{V}$.
f) Calculer les coordonnées de u^k dans la base (p, q), quel que soit $k \in \mathbf{Z}$.
g) Montrer que $Im\, p$ et $Im\, q$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.
h) On suppose E de dimension finie. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ soit une base de $Im\, p$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ une base de $Im\, q$. Ecrire la matrice de u dans cette base.

102) **(Z)** Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^4$ représentée, dans la base canonique, par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer qu'on a $f^2 = -Id_{\mathbf{C}^4}$; en déduire que $Ker\,(f - i\, Id_{\mathbf{C}^4})$ et $Ker\,(f + i\, Id_{\mathbf{C}^4})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbf{C}^4$.
b) Montrer que $w \in Ker\,(f - i\, Id_{\mathbf{C}^4})$ implique $\overline{w} \in Ker\,(f + i\, Id_{\mathbf{C}^4})$. En déduire que $\mathbf{C}^4$ admet une base de la forme $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \overline{w_1}, \overline{w_2})$, où $f(w_j) = i w_j \, (j = 1, 2)$.
c) Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ représenté, dans la base canonique, par la matrice M. Utiliser les résultats ci-dessus pour trouver une base de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle la matrice représentant g soit aussi simple que possible (Indication: on combinera les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à obtenir des vecteurs de $\mathbf{R}^4$).

103) Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

104) A l'aide de déterminants, inverser les matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

105) Calculer les déterminants d'ordre n suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} .$$

106) On se propose de calculer le déterminant — dit de *Van der Monde* —

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Pour cela on fixe $(x_1, \dots, x_{n-1})$ et on pose $P(x) = D_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$. Montrer que P est un polynôme de degré $n-1$, qui s'annule en $x_1, \dots, x_{n-1}$. En déduire une expression de $D_n(x_1, \dots, x_n)$ à l'aide de $D_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et conclure.

107) On suppose $n \geq 3$. Sans le calculer, montrer que le déterminant d'ordre n suivant est nul:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

(Indication: on étudiera le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ engendré par ses vecteurs colonnes).

108) Soit D_n le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} .$$

Trouver une relation de récurrence entre $D_n - D_{n-1}$ et $D_{n-1} - D_{n-2}$; en déduire la valeur de D_n .

109) A l'aide de déterminants, résoudre les systèmes linéaires suivants:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & by & + & z & = & 3 \\ x & + & 2by & + & z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3 \end{array}\right.$$

110) On considère l'application linéaire $f_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à base canonique de $\mathbf{R}^3$, est

$$A_k = \begin{pmatrix} -k-2 & -1 & -1 \\ k-1 & k+1 & k \\ 5-k & 1-2k & 2-2k \end{pmatrix},$$

où k est un paramètre réel. On note E_k le *noyau* de f_k et F_k l'*image* de f_k.

a) Calculer le rang de f_k. On montrera que f_k est de rang 3, *sauf pour une valeur* du paramètre $k = \alpha$ que l'on déterminera. Que peut-on dire des sous-espaces E_k et F_k pour $k \neq \alpha$?

b) Décrire les sous-espaces vectoriels E_α et F_α. On déterminera, plus précisément,

- une base de E_α (resp. F_α),
- une équation ou un système d'équations de E_α (resp. F_α).

c) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

d) Calculer la matrice $B = P^{-1}\, A_1\, P$.

e) Observer qu'on a $B = D + N$, où D est diagonale et $DN = ND$; en déduire la matrice B^n. Comment feriez-vous pour calculer la matrice $(A_1)^n$?

111) On considère la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer judicieusement le déterminant de M et discuter son rang suivant la valeur du réel λ.

112) On considère les systèmes linéaires

$$(S_y)\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = y_1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = y_2 \\ x_1 & +4x_2 & +5x_3 & = y_3 \\ 5x_1 & +6x_2 & +kx_3 & = y_4 \end{array}\right. \quad (S_z^*)\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = z_1 \\ -3x_1 & +x_2 & +4x_3 & +6x_4 & = z_2 \\ -2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +kx_4 & = z_3 \end{array}\right. ,$$

où k est un paramètre réel et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ (resp. $z = (z_1, z_2, z_4)$) un élément de $\mathbf{R}^4$ (resp. $\mathbf{R}^3$).

a) A l'aide de déterminants résoudre les systèmes (S_y) et (S_z^*) .

b) Soit $F \subset \mathbf{R}^3$ (resp. $G \subset \mathbf{R}^4$) l'ensemble des solutions de (S_0) (resp. (S_0^*)). Montrer que F (resp. G) est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base.

V- Nombres réels - Fonctions

113) Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels:

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \sqrt{6},\ \sqrt{2}+1\,,\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\,.$$

114) Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes:

$$x < |x-1| \quad , \quad x < -|x-1| \quad , \quad x^2 < |x-1|\,,$$

$$x^2 < -|x-1| \quad , \quad x^2 < |x - \frac{1}{4}|\,.$$

115) Simplifier l'inégalité $a^2 < ab < b^2$.

116) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

117) Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}$ sont-ils des voisinages de 0:

$$[0, +\infty[\quad , \quad]-\frac{1}{100}, +\frac{1}{1000}[\cup]1000, +\infty[\,,$$

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \quad , \quad \{x\ :\ x^2 - 9 > 0\} \quad , \quad \{x\ :\ x^4 - 5x^2 + 4 > 0\}\,?$$

118) Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}$ sont-ils des voisinages de $+\infty$:

$$[0, +\infty[\setminus \mathbf{N} \quad , \quad \{x\ :\ x^2 - 9 < 0\} \quad , \quad \{x\ :\ x^4 - 5x^2 + 4 > 0\}\,?$$

119) La continuité "à la main". En utilisant la définition "$\varepsilon - \eta$" de la continuité:

a) prouver la continuité de la fonction f au point a, pour

$$f(x) = x^2\,,\ a = 2 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x}\,,\ a = 4 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x}\,,\ a = 3\,;$$

b) prouver la non-continuité de la fonction f en 0, pour

- $f(x) = E(x)$ (partie entière de x).
- La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.
- La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$.

120) Montrer que, dans la définition de continuité, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges, autrement dit que $f : J \to \mathbf{R}$ est continue en $a \in J$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \big((|x-a| \leq \eta \quad \text{et} \quad x \in J) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \big) .$$

121) On dit que f est *uniformément continue sur l'intervalle* J si, dans la définition de la continuité en $a \in J$, on peut faire en sorte que η ne dépende pas de a; autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta > 0 \, \forall x \, \forall y \, \Big((|x-y| < \eta \quad \text{et} \quad (x,y) \in J^2) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big) .$$

a) Dans les cas suivants, montrer que f est uniformément continue sur J:

$$f(x) = kx \quad (J = \mathbf{R}) \quad , \quad f(x) = x^2 \quad (J = [0,4]) ,$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (J = [\frac{1}{10}, +\infty[) \quad , \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (J = [0, +\infty[) .$$

b) Résoudre dans $\mathbf{R}^+$ le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ x - y & = \eta \end{cases} ,$$

avec $\eta > 0$. En déduire que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

122) **(Z)** Soit f, g les applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$f(0) = 0 \, , \; f(x) = x \left| \sin \frac{1}{x} \right| \quad (x > 0) ; \quad g(0) = 0 \, , \; g(x) = 1 \quad (x > 0).$$

a) Calculer les limites de f et g en 0.

b) Montrer que $g \circ f$ est une application bien définie de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Trouver deux suites $(u_n), (v_n)$ dans l'intervalle $]0,1]$ telles que

$$\lim u_n = \lim v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim (g \circ f)(u_n) \neq \lim (g \circ f)(v_n) .$$

La fonction $g \circ f$ admet-elle une limite en 0 ?

c) Relire dans le cours le théorème sur les limites de fonctions composées. Quelle hypothèse de ce théorème est ici en défaut?

123) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction *continue* telle que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall y \in \mathbf{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout réel x (Indication: on calculera la valeur de α et on prouvera la relation pour x entier, puis pour x rationnel).

124) Prouver l'encadrement

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

pour tout réel $x > 0$. En déduire les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right)\,,$$

où a, b sont deux réels positifs.

125) Calculer les limites des suites suivantes:

$$\frac{2n^2+1}{n^2+3n+1} \quad , \quad \frac{1}{n} + (-1)^n \quad , \quad \sqrt{n} + (-1)^n \quad , \quad n^4 + \cos n\,.$$

126) Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}}\,.$$

Prouver l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,;$$

en déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

127) Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose l'existence de

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0, +\infty]\,.$$

Montrer que

$$\lambda > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = +\infty \quad ; \quad \lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = 0$$

(Indication: on comparera u_n avec le terme général d'une suite géométrique). En déduire les limites des suites suivantes

$$\frac{2^n}{n^{1000}} \quad , \quad n^{10000}\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

128) Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,.$$

Montrer l'existence d'un nombre $r > 1$ et de réels λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \lambda r^n + \mu \left(-\frac{1}{r}\right)^n \,.$$

Calculer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

129) Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \,.$$

Calculer u_n^2; en déduire la limite de la suite (u_n).

130) **(Z)** Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{2^n}} \,.$$

On désigne par α_n l'unique solution positive de l'équation

$$x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0 \,.$$

Montrer, par récurrence sur n, la propriété

$$\forall n \geq 2 \qquad u_n > \alpha_n \,.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et trouver sa limite.

131) **(Z)** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j \,.$$

a) Montrer qu'on a

$$\lim u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = 0 \,.$$

b) On suppose $\lambda \in \mathbf{R}^*$; montrer que

$$\lim u_n = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = \lambda$$

(On se ramènera au cas précédent en considérant la suite $(u_n - \lambda)$).

c) Montrer que

$$\lim u_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim v_n = +\infty \,.$$

132) Calculer les bornes supérieures et les bornes inférieures des ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{ \frac{3n-1}{2n+3} \,:\, n \in \mathbf{N} \right\} \quad , \quad E_2 = \left\{ \frac{3n-1}{2n+3} \,:\, n \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad n \geq -2 \right\} ,$$

$$E_3 = \left\{ \frac{3n-1}{2n+3} \,:\, n \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad n \leq -3 \right\} .$$

Ces bornes appartiennent-elles à E_j?

133) **(Z)** Calculer les bornes des ensembles suivants:

$$A = \{\, xy \,:\, |x| + |y| \leq 1 \,\} \quad , \quad B = \{\, xy \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\} .$$

134) **(Z)** Soit A, B deux parties non vides, majorées, de $\mathbf{R}$. On pose

$$A + B = \{\, a + b \,:\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in B \,\} \quad , \quad AB = \{\, ab \,:\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in B \,\} .$$

a) Montrer l'égalité $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

b) Formuler l'égalité ci-dessus dans le cas où A et B sont de la forme

$$A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \quad , \quad B = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} ;$$

en déduire l'inégalité

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} (x_k + y_k) \leq \sup_{k \in \mathbf{N}} x_k + \sup_{k \in \mathbf{N}} y_k ;$$

à l'aide d'un contre-exemple, montrer que cette inégalité peut être stricte.

c) Montrer l'inégalité $(\sup A)(\sup B) \leq \sup(AB)$

d) Montrer qu'on a $(\sup A)(\sup B) \geq \sup(AB)$ si $A \subset \mathbf{R}^+$ et $\sup B \geq 0$.

e) Donner des exemples de parties A, B de $\mathbf{R}$ pour lesquelles

$$(\sup A)(\sup B) < \sup(AB) .$$

135) Pour tout entier $n > 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)j} \; , \; v_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} .$$

a) A l'aide de l'identité $(x(x-1))^{-1} = (x-1)^{-1} - x^{-1}$, calculer u_n; en déduire $\lim u_n$.

b) Comparer les nombres u_n et v_n; en déduire que la suite (v_n) convergente.

136) On considère la suite (u_n) telle que

$$u_0 = 3 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} .$$

a) Etudier la fonction $f(x) = \sqrt{2+x}$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite λ.
c) Trouver un nombre $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall\, n \geq 1 \qquad |u_{n+1} - \lambda| \leq \alpha |u_n - \lambda|$$

(Indication: calculer, puis minorer, le nombre

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

pour $2 \leq y < x$).
d) Quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - \lambda| \leq 10^{-2}$?

137) On considère la suite (u_n) telle que

$$u_0 = 2 \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}\,.$$

a) Etudier la fonction $f(x) = 1 + (1/x)$; en déduire l'encadrement $3/2 \leq u_n \leq 2$.
b) Trouver un nombre réel $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall\, n \geq 1 \qquad |u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|\,;$$

en déduire qu'on a $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.
c) Etudier la fonction $f \circ f$; en déduire que les suites $(u_{2p})_{p\geq 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ forment un couple de suites adjacentes; calculer leur limite commune r.
d) Montrer qu'on a

$$\forall\, n \geq 1 \qquad |u_{n+1} - r| \leq \alpha |u_n - r|\,;$$

quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - r| \leq 10^{-3}$?

138) Pour tout entier $n > 1$, on pose

$$f_n(x) = \cos(\frac{x}{n})\,.$$

a) Etudier la fonction $x - f_n(x)$; en déduire l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]0,1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = \alpha_n$.
b) Montrer l'équivalence

$$x < \alpha_n \quad \Longleftrightarrow \quad f_n(x) > x\,.$$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>1}$ est croissante (on pourra utiliser la question précédente et le fait que la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$).

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>1}$ converge dans $\mathbf{R}$ et calculer sa limite λ.

e) Etudier la fonction

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x\,;$$

en déduire l'inégalité

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$$

pour tout réel x. Quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour obtenir

$$\lambda - \alpha_n \leq \frac{1}{100}\,?$$

139) On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}\,.$$

a) Montrer qu'elles forment un couple de suites adjacentes (on appellera ρ leur limite commune).

b) Montrer qu'il existe un nombre $\theta_n \in]0,1[$ tel que

$$\rho = u_n + \frac{\theta_n}{n.n!}\,;$$

en déduire que ρ n'est pas rationnel (on observera que l'égalité $\rho = m/n$, avec m entier, est incompatible avec la relation ci-dessus).

c) Trouver une valeur décimale approchée de ρ à $1/1000$ près.

Commentaire: on peut montrer que ρ n'est autre que le nombre e, base des logarithmes népériens.

140) Soit $J = [a,b]$ un intervalle fermé borné et $f : J \to J$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un *point fixe*, c'est-à-dire un nombre $c \in J$ tel que $f(c) = c$. On utilisera les méthodes suivantes:

a) appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction judicieusement choisie.

b) considérer l'ensemble $E = \{\, x \in J \,:\, f(x) \geq x \,\}$.

141) a) Soit deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que l'intervalle $]a,b[$ contient au moins un nombre rationnel et au moins un nombre irrationnel. En déduire que tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels.

b) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{Q} \qquad f(x) = 0 \quad , \quad \forall x \notin \mathbf{Q} \qquad f(x) = 1\,.$$

Quel sont les points de $\mathbf{R}$ où f est continue?

c) Même question pour la fonction $g(x) = xf(x)$.

d) Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de nombres réels. Construire une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tel que A soit l'ensemble des points de continuité de h.

142) Trouver une fonction continue et bornée $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 1/2$ et $f(3/2) = 4$.

143) Trouver une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

144) Trouver trois fonctions f_1, f_2, f_3 , définies sur $\mathbf{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2\,.$$

Est-il possible de faire en sorte qu'elles soient toutes les trois continues?

145) Soit f, g deux fonctions continues, définies sur $\mathbf{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |f(x)| = |g(x)|\,.$$

a) On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'on a $f = g$ ou $f = -g$.

b) Que peut-on conclure s'il existe un $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 0$?

146) Simplifiez les expressions suivantes:

$$\mathrm{Arcsin}\,(\sin 2x) \quad , \quad \mathrm{Arcsin}\,\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad , \quad \mathrm{Arccos}\,(\sin x)\,,$$

$$\mathrm{Arctg}\,\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) \quad , \quad \mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2} \quad , \quad \mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,.$$

147) Etablir la formule

$$\mathrm{Arctg}\,a + \mathrm{Arctg}\,b = \mathrm{Arctg}\,\frac{a+b}{1-ab}$$

pour tous nombres a, b tels que $ab < 1$ (Deux indications au choix: (i) utiliser une formule trigonométrique, (ii) dériver par rapport à a). Y-a-t'il une ou des formules analogues pour $ab \geq 1$?
En déduire que les nombres suivants sont tous égaux à $\pi/4$ (il s'agit de formules utilisées historiquement pour calculer π):

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} \quad , \quad 2\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3} + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}\,,$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{8}\quad (\mathit{Strassnitzky}, 1840)\,,$$

$$2\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{2}-\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{7}\quad , \quad 4\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}-\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{239}\quad (\mathit{Machin}, 1706)\,.$$

Retrouver les quatre premières formules par une méthode purement géométrique.

148) Résoudre les équations suivantes:

$$\mathrm{Arcsin}\,x-\mathrm{Arccos}\,x=2\mathrm{Arctg}\,2x-\frac{\pi}{2}\quad , \quad \mathrm{Arctg}\,2x+\mathrm{Arctg}\,x=\frac{\pi}{4}\,,$$

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{4}{5}+\mathrm{Arcsin}\,\frac{5}{13}=\mathrm{Arcsin}\,x\quad , \quad \sin\left(2\mathrm{Arccos}\,\left(\mathrm{cotg}\,(2\mathrm{Arctg}\,x)\right)\right)=0\,.$$

149) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le ou les intervalles de validité du calcul):

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\quad , \quad \left(\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\,x\right)-x\quad , \quad \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{1+x^2}\,.$$

150) Soit $\lambda>0$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\lambda^n)^{1/n}$$

(il y a lieu de discuter suivant λ). En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}(a^n+b^n)^{1/n}\,,$$

pour $a>0$ et $b>0$.

151) Etudier la fonction $f(x)=x^2-x^{3/2}$ et dessiner son graphe.

152) Etudier la fonction $f(x)=3^x-2^x$ et dessiner son graphe.

153) Résoudre l'équation $e^{2x}+e^x=6$.

154) Résoudre et discuter en fonction du paramètre k l'équation

$$\log x=-\log(x-k)\,.$$

155) Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\log x}{\log y}+\dfrac{\log y}{\log x} & =\dfrac{50}{7}\\ \qquad xy & =256\end{array}\right. .$$

156) Calculer $y=2\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x$ sachant que $x=(\log 3)/2$.

157) Simplifier les expressions suivantes:

$$x\left(-\mathrm{ch}\,(\log x)+\mathrm{sh}\,(\log x)\right)\quad , \quad \mathrm{Argth}\,\frac{x^2-1}{x^2+1}\,.$$

158) Résoudre l'équation $2\text{Argsh}\, x + \text{Argth}\,(1/2) = \text{Argch}\, 2$.

159) Calculer

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \text{ch}\, jx \quad , \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} \text{sh}\, jx \, .$$

160) Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le ou les intervalles de validité du calcul):

$$\text{Arctg}\,(\text{sh}\, x) \quad , \quad \log(\text{sh}\, x) \quad , \quad \text{Argth}\, \sqrt{x} \quad , \quad \text{Argth}\,(\text{tg}\, \frac{x}{2}) \, ,$$

$$e^x \log(\sin x) \quad , \quad \text{Arccos}\,(\log x) \quad , \quad x^{\text{Arcsin}\, x} \quad , \quad \log \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}} \, .$$

161) Montrer les identités:

$$2\text{Arctg}\,(\text{th}\, x) = \text{Arctg}\,(\text{sh}\, 2x) \, , \; \text{Argth}\,(\sin |x|) = \text{Argch}\, \frac{1}{\cos x} \, ,$$

pour $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

162) Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to a} (\, f(x) - g(x) \,) = 0 \, .$$

a) On suppose que g admet une limite non nulle (mais — le cas échéant — infinie) en a. Montrer que $f \sim g$ quand $x \to a$.

b) Que peut-on conclure si $\lim g = 0$?

163) Donner des exemples de fonctions telles que $f(x) \sim x \quad (x \to +\infty)$ et que, successivement: $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = b > 0$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ n'existe pas.

164) Soit f et g deux fonctions, telles que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout x et que $f \sim g \quad (x \to a)$.

a) Supposons que f admette une limite dans $[0, +\infty]$, différente de 1. Montrer que $\log f \sim \log g$. Appliquer ce résultat à la recherche de

$$\lim_{x \to 0} \log(\sin x) \, .$$

b) Que peut-on dire quand $\lim f = 1$?

165) Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to a} (\, f(x) - g(x) \,) = 0 \, .$$

Montrer qu'on a $e^f \sim e^g \quad (x \to a)$. A-t-on la même conclusion sous l'hypothèse $f \sim g$?

166) Calculer les limites des fonctions suivantes:

$$\sqrt{1+x^2}-x \quad (x\to\pm\infty) \quad , \quad \frac{x-3}{x^2-3x} \quad (x\to\pm\infty)$$

$$\frac{x-3}{x^2-3x} \quad (x\to 3) \quad , \quad \frac{x\sin x}{1-\cos x} \quad (x\to 0)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} \quad (x\to 0) \quad , \quad \frac{\log(1+x^2)}{\cos x-1} \quad (x\to 0)$$

$$\frac{\sin^2 x+1-\cos x}{x^2} \quad (x\to 0) \quad , \quad \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} \quad (x\to 0)$$

$$\frac{\sin 3x}{1-2\cos x} \quad (x\to\frac{\pi}{3}) \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} \quad (x\to 0)$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\log x-1} \quad (x\to e) \quad , \quad \sqrt{x^4+x-2}-x^2+1 \quad (x\to\pm\infty)$$

$$\frac{\operatorname{ch} 2x-\operatorname{ch} x}{\sin^2 x} \quad (x\to 0) \quad , \quad (\cos x)^{\operatorname{th}^{-2} x} \quad (x\to 0)$$

$$(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{cotg}^2 x} \quad (x\to 0) \quad , \quad \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad (x\to 1)$$

$$\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-(3-2x)^{-1/2}}} \quad (x\to 1) \quad , \quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)^{1/3}-1} \quad (x\to 0)$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad (x\to 0) \quad , \quad x\log(\sin x) \quad (x\to 0)$$

167) Etudier les variations et tracer les graphes des fonctions suivantes:

$$x\log x\,,\ \frac{x}{\log x}\,,\ (x-1)\log\frac{1-x}{1+x}\,,\ \exp\frac{x-1}{x^2}\,,\ x^{1/x}\,,\ \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}.$$

168) Etudier les fonctions

$$f(x)=\log(e^x-1) \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{xe^x}{1-e^x}\,;$$

en déduire que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une solution et une seule, située dans l'intervalle $]0,1[$; donner une valeur approchée de cette solution.

169) Montrer qu'on peut appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x)=x-x^3$ sur les intervalles $[-1,0]$ et $[0,1]$. Déterminer dans chaque cas la valeur de c.

170) Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $[0,4]$? à la fonction $f(x)=\operatorname{tg} x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$?

171) Soit $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$. Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet trois racines réelles. Généralisation?

172) On considère des réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = 0$$

admet $n-1$ racines réelles. Indication: utiliser l'exercice précédent.

173) Vérifier qu'on peut appliquer le Théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-2, +1]$; quelle valeur de c obtient-on? Même question pour $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ sur $[-1, +1]$.

174) Prouver l'encadrement

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} \;<\; \operatorname{Arcsin} 0,6 \;<\; \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}\,.$$

175) Montrer que, pour $0 < x < 1$, on a

$$\operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

176) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\operatorname{Arctg} x \geq \frac{x}{1+x^2}\,.$$

177) Quelle est la valeur de θ dans la formule des accroissements finis

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$$

appliquée à la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$?

178) En appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction $\log x$, montrer que la suite

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers l'infini.

179) En appliquant le Théorème des accroissements finis à une fonction convenable, montrer que la suite

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

est majorée par 2. Cette suite est-elle convergente?

180) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que que la droite tangente au graphe de f en $(c, f(c))$ passe par l'origine.

181) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable admettant une limite *finie* λ en $+\infty$.

a) On suppose que $f(a) = \lambda$. Montrer qu'il existe un réel $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.
b) On suppose que f' admet une limite en $+\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
c) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que f' n'admet pas nécessairement de limite en $+\infty$.

182) Soit $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

a) On suppose que f' est dérivable sur $]0, a]$ et que f' admet une limite finie en 0. Montrer que f est dérivable en 0.
b) Donner un exemple d'une fonction f qui soit dérivable sur $[0, a]$ mais dont la dérivée ne soit pas continue en 0.
c) A l'aide du a), montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-1/x} \quad (\text{pour} \quad x > 0) \quad , \quad f(x) = 0 \quad (\text{pour} \quad x \leq 0)$$

est indéfiniment dérivable.

183) Soit p et q deux nombres réels et un entier $n > 0$. On pose $f(x) = x^n + px + q$.

a) Montrer que si f admet k racines réelles, f' en admet au moins $k - 1$.
b) En déduire que si n est pair, f a au plus 2 racines réelles et que si n est impair, f en admet au plus 3.

VI- Développements limités

184) Calculer les développements limités en 0, à l'ordre 4, des fonctions suivantes:

$$(\sin x)(\operatorname{Argsh} x) \quad , \quad (\operatorname{ch} x)(\operatorname{Argth} x) \quad , \quad e^x \log(1+x) \quad , \quad (\cos x)\sqrt{1+x}\,.$$

185) Calculer les développements limités en 0, à l'ordre 3, des fonctions suivantes:

$$\frac{\log(1+x)}{\sin x} \quad , \quad \frac{\log^2(1+x)}{e^x - 1} \quad , \quad \log(\cos x) \quad , \quad \sqrt{1 - \log(1+x)}\,.$$

186) Calculer les D.L. à l'ordre n, au point a, des fonctions suivantes:

$$\sqrt{x} \quad (a > 0) \quad , \quad \log x \quad (a > 0) \quad , \quad e^x \quad , \quad \cos x\,.$$

187) Calculer les D.L. à l'ordre 3, aux points 1 et $e^{\pi/2}$, de la fonction $\cos(\log x)$.

188) Calculer les D.L. des fonctions suivantes en 0 à l'ordre N:

$$\operatorname{Arctg}(1+x) \quad (N=4) \quad , \quad (\operatorname{Argth} x)\frac{1}{1+x} \quad (N=5)\,,$$

$$\operatorname{Arctg}(\operatorname{Argth} x) \quad (N=5) \quad , \quad \frac{-\log(1-x)}{1+\operatorname{Arctg} x} \quad (N=4)\,.$$

189) A l'aide de développements limités, calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\operatorname{ch} x-2}{x^4} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)\,,$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\log(\sin x)}{(\pi-2x)^2} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{th}\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x}\,.$$

190) A l'aide de développements limités, étudier, quand $x\to+\infty$, les fonctions suivantes:

$$x^2\operatorname{Arctg}\frac{1}{1+x} \quad , \quad x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

(pour le graphe de chacune d'elles, on déterminera l'asymptote oblique et la position par rapport à l'asymptote).

191) Montrer que le graphe de la fonction

$$x^2\log\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

est asymptote à une parabole dont on déterminera l'équation.

192) Déterminer le nombre réel λ de sorte que la fonction

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+\lambda x^2+1}$$

tende vers 0 quand x tend vers $-\infty$; déterminer alors le développement limité de f , à l'ordre 3, en $-\infty$, autrement dit les nombres a,b,c tels que

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(x)\,,$$

où $\lim_{x\to-\infty}\epsilon(x)=0$. (Indication: il sera commode de faire le changement de variable $t=1/x$).

193) On considère les fonctions

$$f(x)=e^x-1 \quad , \quad g(x)=1-\cos x+\sin 2x\,.$$

a) Calculer le développement limité, à l'ordre 3 , en 0 , de la fonction $h(x)=f(g(x))-g(f(x))$.

b) En déduire que la fonction

$$u(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

se prolonge par continuité en 0 et que la fonction obtenue (encore notée u) est dérivable en 0 ; donner les valeurs de $u(0)$ et $u'(0)$.

194) On se propose de donner une valeur approchée de $\cos x$, pour un $x \in [0, \pi]$, à l'aide de la formule

$$\cos x = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \text{Erreur}\,.$$

Quelle valeur suffit de donner à n pour être sûr que l'erreur soit inférieure à 10^{-4}?

195) Calculer la limite, quand x tend vers 0 de la fonction

$$\frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x - x^5}\,.$$

196) Calculer la partie principale, quand x tend vers 0, de la fonction

$$\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)\,.$$

197) On pose

$$f(x) = e^{-3(x-1)} + 3x \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Calculer le D.L. de g, à l'ordre n, en 1; en déduire la partie principale de g quand x tend vers 1.

198) **(Z)** Soit g une fonction indéfiniment dérivable définie sur un intervalle U contenant 0 , telle que $g(0) = 0$. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0 , est une fonction indéfiniment dérivable sur U . On pourra procéder comme suit:

a) Calculer $f^{(n)}(x)$, pour $x \neq 0$, à l'aide de la formule de Leibniz.
b) Exprimer $g(0)$ en fonction des $g^{(j)}(x)$ $(j = 0, \ldots, n)$ grâce à la formule de Taylor.
c) Utiliser l'exercice 182.

199) **(Z)**

a) Montrer l'existence d'une fonction f , définie sur $\mathbf{R}$, indéfiniment dérivable, telle que

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}\,,$$

quel que soit $x \in \mathbf{R}^*$ (Utiliser l'exercice précédent).

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et que la bijection réciproque f^{-1} est indéfiniment dérivable.

c) Calculer le développement limité, en 0, à l'ordre 7, de la fonction f^{-1} (Idée: éviter d'utiliser la formule de Taylor; utiliser plutôt *l'unicité* du développement limité de la fonction $f^{-1} \circ f$).

200) **(Z)**

a) Soit f une fonction deux fois continûment dérivable au voisinage de a, telle que $f''(a) \neq 0$. Montrer que, dans la formule des accroissements finis $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, la limite de θ quand h tend vers 0 est égale à $\frac{1}{2}$. (On pourra utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2).

b) Soit f une fonction trois fois continûment dérivable au voisinage de a, telle que $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Montrer que, dans la formule des accroissements finis $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, la limite de θ quand h tend vers 0 est égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (On pourra utiliser la formule de Taylor à l'ordre 3 pour la fonction f et la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f').

c) De façon générale, discuter (sous des hypothèses appropriées) la limite de θ_n, quand h tend vers 0, dans la formule de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta_n h) \, .$$

VII- Courbes paramétrées

Sauf précision supplémentaire, l'étude d'une courbe paramétrée comporte systématiquement:

- *l'établissement d'un tableau de variations simultanées pour les fonctions $x(t)$, $y(t)$,*
- *l'étude des points stationnaires,*
- *l'étude des branches infinies, avec la recherche d'éventuelles asymptotes obliques,*
- *un tracé de la courbe.*

201) Etude de la courbe paramétrée:

$$x = t - t^3 \quad , \quad y = \frac{t^2}{2} - \frac{3t^4}{4} \, .$$

202) On considère la courbe paramétrée Γ d'équations:

$$x = \frac{t^3+2}{t^2+1} \qquad y = \frac{t^3+3t+2}{t^2+1} \, .$$

On étudiera les branches infinies et on déterminera les asymptotes éventuelles ainsi que la position de Γ par rapport à ces asymptotes. Quelle est la propriété remarquable du point de paramètre -2 ?

203) Etudier la courbe paramétrée

$$x = \frac{t^2}{1+t} \quad , \quad y = \frac{t^3}{1+t}\,.$$

On montrera que deux des branches infinies sont asymptotes à une parabole dont on déterminera l'équation; on calculera le point d'inflexion de la courbe.

204) Etudier la courbe paramétrée

$$x = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \quad , \quad y = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{t^5}{5}\,.$$

On montrera qu'elle admet pour $t = 1$ un point de rebroussement de seconde espèce; on séparera les deux branches de la courbe au voisinage de ce point à l'aide d'un arc de parabole.

205) Etudier la courbe paramétrée

$$x = \cos^2 t + \log(\sin t) \quad , \quad y = \sin t\, \cos t\,.$$

On restreindra l'intervalle d'étude en notant que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x.

206) Etude de la courbe paramétrée

$$x = e^{1/t}\frac{(t-1)^2}{t} \quad , \quad y = e^{-1/t}\frac{(t-1)^3}{t^2}\,.$$

207) On considère la courbe paramétrée

$$x = t^2 + \frac{a}{t} \quad , \quad y = (t+1)^2 + \frac{b}{t}\,.$$

Déterminer a et b de sorte que la courbe admette un point de rebroussement de première espèce pour $t = 1$; étudier alors la courbe (on déterminera notamment son point d'inflexion).

208) Etude des courbes paramétrées suivantes:

$$x = \frac{t^3}{t^2-1} \quad , \quad y = \frac{t^2}{t-1}$$

$$x = \operatorname{tg} t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t$$

$$x = t^2 + 2t \quad , \quad y = 2t - \frac{1}{t^2}\,.$$

209) Etudier la courbe paramétrée

$$x = t^2\frac{3t+5}{1-t} \quad , \quad y = t^4\frac{7t+9}{1-t}\,.$$

On montrera qu'elle admet pour $t = 0$ un point de rebroussement de seconde espèce; on séparera les deux branches de la courbe au voisinage de ce point à l'aide d'un arc de parabole.(Le tracé de la courbe n'est pas demandé, sauf si vous disposez de moyens informatiques...)

VIII- Intégrales et primitives

210) Soit $\alpha > 0$. Démontrer l'encadrement

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha} \le 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

quel que soit l'entier $n \ge 1$. Discuter suivant α la nature de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha}\,.$$

Dans le cas $\alpha \le 1$, donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.

211) Utiliser le calcul intégral pour calculer les limites des suites suivantes, quand $n \to +\infty$:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k/n} \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad , \quad c_n = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p \quad (p \in \mathbf{N})\,.$$

Calculer directement les limites de (a_n) et de (c_n) $(p = 0, 1, 2)$.

212) Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant le ou les intervalles de validité du calcul:

$$\sin x\, \sin 2x \quad , \quad \sin^2 x \quad , \quad \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 3x \quad , \quad \log \frac{\sqrt{1-x}}{2-x}$$

$$(\cos x + \sin x)^4 \quad , \quad \frac{x^4}{x^2+1} \quad , \quad \frac{1}{x^2+x-20} \quad , \quad \frac{1}{x^2-10x+29}$$

$$\frac{1}{x^2-14x+49} \quad , \quad \sin^2 x\, \cos x \quad , \quad \frac{1-x}{1+x^2}\,.$$

213) Calculer les primitives des fonctions suivantes, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties:

$$(\cos x) \log(1+\cos x) \quad , \quad e^{5x}(x^3 - 2x^2 + x - 4)\,,$$

$$\operatorname{Argsh} x \quad , \quad \log(1+x^2) \qquad \operatorname{ch} 5x \cos 2x\,.$$

214) Calculer les primitives des fonctions suivantes, à l'aide d'un changement de variables (parfois indiqué entre parenthèses):

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad , \quad x(2x+5)^{10} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \quad (t = \sqrt{e^x-1}) \quad , \quad \frac{1}{e^x+1}\,,$$

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}} \quad (t = \sqrt[3]{x+1}) \quad , \quad \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x = \sin t) \quad , \quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

$$\log(\sqrt[3]{x}-1) \quad , \quad \operatorname{Argsh} x \quad , \quad \frac{1}{x \log^\alpha x} \quad , \quad \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}} \quad (x = \operatorname{sh} t)\,.$$

215) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 6x - 27|}}\,.$$

a) Préciser les intervalles de $\mathbf{R}$ où f est définie; calculer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

b) Déterminer une fonction g, *continue* sur $\mathbf{R}$, telle que $g'(x) = f(x)$ en tout point où f est définie.

216) Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer une primitive de la fonction $x^n \cos x$; en déduire une primitive de $(\mathrm{Arcsin}\, x)^n$.

217) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in \mathbf{N})$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation simple entre J_n et J_{n-1}; en déduire la valeur de J_n.

218) On pose

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{tg}^{\,n} t\, dt \quad (x \in]-\pi/2, +\pi/2[)\,.$$

Exprimer simplement la fonction $f_{n+2} + f_n$; en déduire une formule permettant de calculer $f_n(x)$ par récurrence sur n.

219) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et qu'on a $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \geq 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, prouver l'inégalité

$$\left| \int_{\pi/2}^x f(t)\, dt \right| \leq \frac{2}{\pi}\,.$$

c) Montrer que la fonction f admet une primitive bornée sur $[0, +\infty[$.

220) **(Z)** Soit a, b deux *entiers* positifs; on pose $P_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$.

a) Montrer que P_n, ainsi que ses dérivées à tout ordre, prennent des valeurs entières en 0 et en a/b.

b) Montrer que la suite

$$U_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x\, dx$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) On suppose que $\pi = a/b$. Montrer que U_n est un entier pour toute valeur de n (on pourra raisonner par récurrence sur n à l'aide d'une intégration par parties). Que peut-on en conclure?

IX- Intégrales impropres

221) Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

$$\int_0^1 \log x \quad , \quad \int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x\right)\, dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{\log^2 x}{x} dx\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-x}\sin x\, dx \quad , \quad \int_0^\infty \frac{x+\log x}{x^2} dx \quad , \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{sh} x} \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \quad , \quad \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad , \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{x-1}{\log x} dx\,.$$

222) **(Z)** Soient α, β deux nombres réels. Discuter l'existence de l'intégrale impropre

$$I_{\alpha,\beta} = \int_2^\infty x^\alpha \log^\beta x\, dx\,;$$

trouver un équivalent simple, quand $x \to +\infty$, des fonctions

- $x \mapsto \int_2^x t^\alpha \log^\beta t\, dt$, dans les cas où $I_{\alpha,\beta}$ n'existe pas.
- $x \mapsto \int_x^\infty t^\alpha \log^\beta t\, dt$, dans les cas où $I_{\alpha,\beta}$ existe.

(On pourra utiliser la règle de l'Hospital).

223) Montrer l'existence de l'intégrale impropre $J = \int_0^\infty \frac{x \log x}{(x^2+1)^2} dx$; à l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x\log x}{(x^2+1)^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$; en déduire la valeur de J.

224) Montrer l'existence de l'intégrale impropre

$$J(a,b) = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

pour $a < b$; calculer $J(a,b)$ (Indication: se ramener par changement de variables à $a = 0$, $b = 1$).

225) Montrer l'existence de l'intégrale impropre

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2}\, dx\,.$$

Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\log(1-x^2)}{x^2}$ sur l'intervalle $]0,1[$; en déduire la valeur de J.

226) On désigne par Δ la *fonction triangle*: il s'agit de la fonction paire telle que

$$\Delta(x) = 1 - x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad , \quad \Delta(x) = 0 \quad (x > 1)\,.$$

On définit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ de la façon suivante:

- $f(x) = 2^n \Delta\left(3^n(x-n)\right)$ si $x \in [n - 3^{-n}, n + 3^{-n}]$ pour un entier $n \geq 1$,
- $f(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que f est une fonction continue; montrer que $f(x)$ n'admet pas de limite dans $[0, +\infty]$, quand x tend vers $+\infty$.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n+3^{-n}} f(x)\,dx$, pour tout entier $n \geq 1$; en déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

c) Quelle "morale" tirer de ce qui précède?

X- Equations différentielles

227) Résoudre l'équation différentielle $y' = 1 + (\operatorname{tg} x)y$ sur l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$.

228) Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{3}{x}y + \dfrac{x^3}{x^2+1}$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$; étudier le comportement des solutions quand x tend vers 0; en déduire les solutions de l'équation différentielle

$$xy' = 3y + \frac{x^4}{x^2+1}\,.$$

229) Résoudre l'équation différentielle: $(x^2+1)y' + 2xy = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\operatorname{Arctg}\sqrt{x}$.

230) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1 + x^2)y' - 2y + 2\sqrt{y} = 0\,.$$

Montrer que, si y est une solution de (E), la fonction $z = \sqrt{y}$ est solution d'une équation linéaire; en déduire les solutions de (E).

231) **(Z)** Soit f une fonction indéfiniment dérivable définie sur $[0, +\infty[$. On se propose d'étudier le comportement, au voisinage de 0, des solutions des équations

$$(E_1) \quad xy' + y = f(x) \quad , \quad (E_2) \quad xy' - y = f(x)\,.$$

a) Exprimer à l'aide de f les solutions générales de (E_1) et de (E_2) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$; en déduire que, parmi les solutions de (E_1), il y en a une et une seule qui se prolonge par continuité en 0.

c) Soit y une solution de (E_2). A l'aide de la règle de l'Hospital, montrer que y se prolonge par continuité en 0. Montrer que y est dérivable en 0 si et seulement si $f'(0) = 0$.

d) Déterminer les solutions de (E_1) et de (E_2) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

232) Résoudre les équations différentielles à variables séparées:

$$y'x^2 = y^2 - 1 \quad , \quad y'x = \sqrt{1+y^2}\,.$$

233) Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2y' + xy = x^2 + y^2\,.$$

Montrer que, si y est une solution de (E) définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}^*$, la fonction $\varphi(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ est solution d'une équation différentielle à variables séparées; en déduire la solution générale de (E).

234) Soit α un nombre complexe. Déterminer toutes les fonctions $z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telles que $z' = \alpha z$; en déduire les solutions du *système différentiel*:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x'(t) = & x(t) & +y(t) \\ y'(t) = & -x(t) & +y(t) \end{array} \right. ,$$

où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable réelle t, à valeurs réelles.

XI- Arithmétique

235) Calculer le p.g.c.d. de 987 et 819 par chacune des méthodes suivantes:

- l'algorithme d'Euclide,
- la décomposition de chacun des nombres en facteurs premiers.

236) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre réel $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel (on pourra raisonner par l'absurde en supposant $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$, où p, q sont des entiers premiers entre eux et $q \geq 2$).

237) Pour chacun des nombres suivants, on déterminera sa classe modulo n:

$$754.849^{4578} \quad (n = 7), \quad 458^{(941^{473})} \quad (n = 3), \quad 742^{444} \quad (n = 11)\,.$$

238) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'entier $3^{2n+1} + 2.4^{3n+1}$ est un multiple de 11.

239) Trouver tous les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que

$$5^n \equiv 2 \quad (mod.\,7) \quad \text{et} \quad 2^n + 3^n \equiv 0 \quad (mod.\,5)\,.$$

240) a) Déterminer le p.g.c.d. de 1176 et 198; on le notera d.
b) Déterminer alors deux éléments x_0 et y_0 de $\mathbf{Z}$ tels que

$$1176x_0 + 198y_0 = d\,.$$

c) Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation

$$1176x + 198y = d\,.$$

241) On se propose de trouver tous les entiers x tels que

$$(E) \quad x \equiv 36 \quad (mod.\,25) \quad \text{et} \quad x \equiv 96 \quad (mod.\,77)\,.$$

a) Vérifier que 77 et 25 sont premiers entre eux et déterminer des entiers u, v tels que $77u + 25v = 1$.
b) A l'aide de cette relation, déterminer deux entiers a, b tels que

$$a \equiv 1 \quad (mod.\,25) \quad \text{et} \quad a \equiv 0 \quad (mod.\,77)\,,$$

$$b \equiv 0 \quad (mod.\,25) \quad \text{et} \quad b \equiv 1 \quad (mod.\,77)\,.$$

c) En déduire *une* solution de (E), puis *toutes* les solutions de (E).

242) Calculer, s'il existe, l'inverse de 3 dans chacun des anneaux suivants: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $\quad (n = 2, 3, 4, 7, 9)$.

243) Résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans les anneaux suivants: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

244) Résoudre l'équation $2x^2 - 1 = 0$ dans les anneaux suivants: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

245) Résoudre l'équation $2(x^2 - x) = 0$ dans les anneaux suivants: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

246) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{Z}$, x^2 est congru à 0 , 1 ou -1 modulo 5.
b) Soit x, y deux entiers relatifs. Montrer que $2y^2 - x^2$ est divisible par 5 si et seulement si x et y sont eux-mêmes divisibles par 5.
c) En déduire qu'il n'existe pas de couple $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $2y^2 - x^2 = 5$.

247) a) Dresser la liste des carrés de $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$; en déduire que l'équation:

$$x^2 + y^2 = 0$$

admet $x = y = 0$ comme unique solution dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$.
b) Soit $(x, y, z) \in (\mathbf{N}^*)^3$ une solution de l'équation

$$(E) \quad x^2 + y^2 = 11z^2\,.$$

Montrer qu'il existe une solution $(x', y', z') \in (\mathbf{N}^*)^3$ de (E) vérifiant

$$x' < x \quad , \quad y < y' \quad , \quad z' < z\,.$$

c) Montrer que la seule solution de (E) dans $\mathbf{Z}^3$ est $x = y = z = 0$.

XII- Polynômes

248) a) Montrer que $X^5 - X^3 + X - 2$ et $X^2 - 1$ sont premiers entre eux.

b) Déterminer *un* couple (U, V) de polynômes tels que

$$(X^5 - X^3 + X - 2)U + (X^2 - 1)V = 1\,.$$

c) Trouver *tous* les couples (U, V) vérifiant l'identité précédente.

249) Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \qquad , \; Q = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 2X - 4\,.$$

a) Calculer $D =$ P.G.C.D. $\{Q, P\}$.

b) Déterminer deux polynômes U et V tels que $D = PU + QV$.

c) Déterminer les deux polynômes A et B tels que $P = AD$ et $Q = BD$.

d) Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ (On observera que le polynôme B a une racine évidente).

250) a) Montrer que, dans $\mathbf{R}[X]$, les polynômes $(X-1)^2$ et $(X-2)^3$ sont premiers entre eux.

b) Déterminer les polynômes U et V de degrés minimaux tels que

$$(X - 1)^2U + (X - 2)^3V = 1\,.$$

c) Déterminer la forme générale des polynômes R, S tels que

$$(X - 1)^2R + (X - 2)^3S = X\,.$$

d) Déterminer le polynôme P de degré minimum tel que son reste dans la division par $(X - 1)^2$ soit $2X$ et celui dans la division par $(X - 2)^3$ soit $3X$.

251) Calculer le PGCD des polynômes $X^{20} - 1$ et $X^{12} - 1$. Généralisation?

252) Dans $\mathbf{C}[X]$, on considère le polynôme $P = (X + 1)^6 - (X - 1)^6$.

a) Quel est le degré de P?

b) Rechercher les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ (On pourra s'intéresser à $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$).

c) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

253) a) Montrer que $(1, X - 1, X^2 - X, (X - 1)^3)$ est une base de $E = \mathbf{R}_3[X]$.

b) Soit F le sous-espace de E engendré par $X^2 - X$ et $(X-1)^3$. Montrer que

$$F = \{ P \in E \,:\, P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P''(1) - 2P'(1) = 0 \} .$$

254) Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}_4[X]$ défini par $u(P) = P + (1-X)P'$. Déterminer des bases de l'image et du noyau de u et montrer que ce sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbf{R}_4[X]$.

255) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer que les polynômes $X^n - 1$ et $X^n + 1$ sont premiers entre eux.

b) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Comparer le P.G.C.D.$(P, X^{2n} - 1)$ avec

$$P.G.C.D.\,(P, X^n - 1) \quad \text{et} \quad P.G.C.D.\,(P, X^n + 1) .$$

256) On considère le polynôme $P = X^3 + 3X + 1$.

a) Montrer que P n'admet pas de racine dans $\mathbf{Q}$.

b) En étudiant la fonction $x \mapsto P(x)$ sur $\mathbf{R}$, établir que P a une unique racine réelle $\alpha \in]-1, 0[$.

c) Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

d) A l'aide de α, écrire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

257) (Suite de l'exercice précédent) On se propose de trouver les racines de P dans $\mathbf{C}$.

a) Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ définie par $\varphi(z) = z - \dfrac{1}{z}$ est surjective; est-elle injective?

b) A tout nombre complexe x, on associe *un* couple (u, v) tel que

$$\varphi(u) = x \quad \text{et} \quad x = u + v .$$

Montrer que x est une racine de P si et seulement si $u^3 + v^3 = -1$.

c) S'il en est ainsi, établir que les nombres $U = u^3$ et $V = v^3$ sont racines de l'équation du second degré $z^2 + z - 1 = 0$ et les calculer.

d) Donner la valeur de α, puis celles des racines *non réelles* de P.

258) Soit $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Soit un rationnel $x = p/q$, où les entiers p, q sont premiers entre eux. Montrer que, si x est une racine de P, p est un diviseur de a_n et q un diviseur de a_0.

259) A l'aide de l'exercice précédent:

a) déterminer les racines rationnelles de l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10 = 0 ;$$

b) montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ n'a pas de racine rationnelle;

c) factoriser sur $\mathbf{R}$ le polynôme $3X^3 + 8X^2 + 12X - 5$.

260) On rappelle que j désigne le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On considère le polynôme $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$. Montrer que si j est une racine de P_n, il en est de même pour $\overline{j}$; en déduire que P_n est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si $n \equiv 1\,(mod.\,6)$ ou $n \equiv 5\,(mod.\,6)$.

261) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un *unique* couple (U, V) de polynômes de degré inférieur à n tels que

$$X^n U(X) + (1-X)^n V(X) = 1\,.$$

b) Prouver que $V(X) = U(1-X)$.

c) Montrer l'existence d'un réel λ tel que

$$nU(X) + XU'(X) = \lambda(1-X)^{n-1}\,;$$

d) Calculer $U(X)$.