Feuille d'exercices n^o 1

1. Calculer

$$|3-7i|,\ (2+5i)(3-7i),\ (3-4i)^2,\ \frac{2+5i}{3-7i},\ \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$$

2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres

$$z_1 = 3+3i\ ,\ z_2 = -1-\sqrt{3}\,i\ ,\ z_3 = -\frac{4}{3}i\ ,\ z_4 = -2\ ,\ z_5 = e^{i\theta}+e^{2i\theta}\ .$$

3. Montrer que $(1+i)^8$ est réel.

4. Quelle est, dans le plan complexe, l'interprétation géométrique du conjugué d'un point z ? de son opposé ? du conjugué de son opposé ? de iz ? Comment construire géométriquement les racines carrées d'un nombre complexe $z = e^{i\theta}$ de module 1 ?

5. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et en déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et de $\sin(\frac{\pi}{8})$. Calculer de même $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

6. i) Re-démontrer les formules trigonométriques de l'angle double en partant de la formule de Moivre.
ii) Écrire sous forme algébrique les racines carrées de

$$z_1 = i\ ,\ z_2 = 3+4\,i\ ,\ z_3 = -2+2\sqrt{3}\,i\ ,\ z_4 = \frac{1+i}{1-i}\ .$$

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations
1) $z^2+z+1=0$; 2) $z^2-(1+2\,i)\,z+i-1=0$; 3) $z^2-\sqrt{3}\,z-i=0$; 4) $4\,z^2-2\,z+1=0$;
5) $z^4+2\,z^2+4=0$.

8. Soient $z = a+ib,\ z' = a'+ib'$ deux nombres complexes.
i) Calculer $z\overline{z}$.
ii) Exprimer $\overline{z+z'}$ et $\overline{zz'}$ en fonction de $\overline{z},\ \overline{z}'$.
iii) Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) := \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que $\overline{\mathrm{P}(z)} = \mathrm{P}(\overline{z})$.

9. Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z-z'| = |1-\overline{z}z'| \iff |z| = 1 \text{ ou } |z'| = 1\ .$$

10. Représenter dans le plan complexe les ensembles définis par :

$$\begin{array}{lll} a)|z-1| = 1; & b)|z+i-3| \leqslant 2; & c)|z-i| = |z+1|; \\ d)z+\overline{z} = z\overline{z}; & e)z+4/z \in \mathbb{R}; & d)|z| = |z^{-1}| = |z-1|. \end{array}$$

11. Exprimer $\cos 4\theta$ (resp. $\sin 4\theta$) comme un polynôme en $\cos\theta$ (resp. comme le produit par $\sin\theta$ d'un polynôme en $\cos\theta$). Linéariser $\cos^4\theta,\ \sin^4\theta$.

12. Linéariser les expressions suivantes : $\sin^6 x,\ \cos^3 x\sin^2 x,\ \cos^5 x$.

13. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $e^{i\alpha}+1$. Faire une figure.

14. Résoudre l'équation $z^2 = \overline{z}$.

15. Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Montrer que :

i) Si $z + z^{-1}$ est réel, alors z est réel ou $|z| = 1$. Vérifier que dans le premier cas, on a $|z + z^{-1}| \geqslant 2$ et que dans le second on a $|z + z^{-1}| \leqslant 2$. (N. B. Ces deux cas ne s'excluent pas tout à fait : $z = \pm 1$.)

ii) Si $z + z^{-1}$ est imaginaire pur, alors z est imaginaire pur.

16. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$. *(Utiliser l'exercice précédent)*

17. Soient z_1, z_2 des nombres complexes. Montrer qu'on a :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\Re(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2$$

En déduire que :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

Interprétation géométrique.

18. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$3z^2 + z + 1 = 0 \ .$$

19. Soit A un point du plan complexe d'affixe $\alpha = a + ib$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$.
2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\dfrac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz et i soient alignés.
4. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz et i forment un triangle équilatéral.
5. Soit $z = a + ib$, écrire $\dfrac{z-1}{z+1}$ sous forme $A + iB$ avec A et B réels.
6. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que

$$arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

20. i) Montrer que les racines de $X^3 - 1$ (i.e. les racines cubiques de l'unité) forment une partie $\{1, j, j^2\} \subseteq \mathbb{C}$ et disposer ces trois points sur le plan complexe.

ii) Pour un polynôme P, on note °P son degré. Que vaut $\min\{°P \mid P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } P(j) = 0\}$?

21. (i) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Rappeler comment on peut factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$. Quelles sont les formules exprimant les racines de $aX^2 + bX + c$ en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$?

(ii) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme $aX^2 + bX + c$ sont réelles ou conjuguées.

22. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que les racines du polynôme $X^2 + \alpha X + \beta$ soient réelles. Montrer que α, β sont réels.

23. On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition et multiplication (i.e. la somme de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ en est un, même chose pour le produit).

ii) Un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est dit *inversible* s'il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$.

a) Que peut-on dire de $|z|$ pour un tel z ?

b) Déterminer alors tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

24. Soit n un entier naturel non nul fixé. On considère l'équation E_n suivante :

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0$$

i) Montrer que, si u est une racine de E_n, alors $\frac{u+1}{u-1}$ est une racine n-ième de l'unité.
ii) Résoudre l'équation E_n.
iii) Écrire en notation cartésienne les racines de E_6.

25. On pose $u = \frac{1}{2}(1+i)$ et $S_n = 1 + u + \cdots + u^n$ pour $n \geqslant 1$. Représenter les points $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$, ainsi que la ligne brisée qui les joint.

26. i) Soit z un nombre complexe $\neq 1$. Montrer que pour tout entier $n > 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

ii) Pour tout réel θ, montrer que $1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\theta/2} \sin \theta/2$

iii) En déduire que $1 + e^{i\theta} + \ \cdots + e^{ni\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} e^{ni\theta/2}$, puis calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\theta$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$.