MM1- TD n°2

***Exercice* 1.** — Décrire explicitement l'ensemble des parties des ensembles suivants :

$$E_1 = \emptyset \quad ; \quad E_2 = \{0\} \quad ; \quad E_3 = \{0, 1, 2\}$$

***Exercice* 2.** — Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer les égalités suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$
2. $(A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B) = A^c$
3. $(A^c \cap B)^c \cap (A \cap B)^c = B^c$
4. $(A \cap (B \cup C)) \cap ((B \cap C) \cup C^c) = A \cap B$
5. $(A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup ((A^c \cup B) \cap (A \cup C))^c = E$
6. $(A \cup C) \cap ((A \cup B \cup C)^c \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)) \cap (C \cup (B \cap C)) = \emptyset$

***Exercice* 3.** — Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$:

1. Décrire $A \cap B$ quand A est l'ensemble des diviseurs de 45 et B est l'ensemble des diviseurs de 55.
2. Décrire $A \cup B$ quand A est l'ensemble des multiples de 2 et B est l'ensemble des multiples de 4.

***Exercice* 4.** — Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E, on rappelle que la différence symétrique de A et B est

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ et en déduire une expression de $(A \Delta B)^c$.
2. Montrer que $A \Delta \emptyset = A$, que $A \Delta A = \emptyset$.
3. Montrer que

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C) \cap (A^c \cup B \cup C^c) \cap (A \cup B^c \cup C^c) = (A \Delta B) \Delta C$$

***Exercice* 5.** — Soient E et F deux ensembles.

1. Soient S et T deux parties de E, et soit U et V deux parties de F, montrer que $(S \cap T) \times (U \cap V) = (S \times U) \cap (T \times V)$.
2. On considère les intervalles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

***Exercice* 6.** — Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :
   a. $f([0, 1])$, $f([-1, 0])$, $f([-1, 1[)$, $f([-2, 3])$, $f(]-3, 2])$.
   b. $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(]-2, 0])$, $f^{-1}([-1, 1[)$, $f^{-1}([-2, 0[)$.
2. Comparer les ensembles suivants

a. $[0,1]$ et $f^{-1}(f([0,1]))$.
b. $[-1,1]$ et $f(f^{-1}([0,1]))$.
c. $[0,1]\cap[-1,0[$ et $f([0,1])\cap f([-1,0[)$.

***Exercice* 7.** — Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction sinus. Décrire les ensembles suivants :

$$f([-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]) \quad , \quad f^{-1}(\{f(\frac{\pi}{4})\}) \quad , \quad f^{-1}([1,+\infty[) \quad , \quad f(f^{-1}([1,+\infty[))$$

$$f^{-1}(]1,+\infty[) \quad , \quad f(f^{-1}(]1,+\infty[)) \quad , \quad f^{-1}([\frac{1}{2},+\infty[) \quad , \quad f(f^{-1}([\frac{1}{2},+\infty[))$$

***Exercice* 8.** — Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

1. Montrer que si $A\subset B$ alors $f(A)\subset f(B)$.
2. Montrer que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
3. Montrer que $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. Montrer que si f est injective $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ et donner un exemple pour lequel l'égalité est fausse.

***Exercice* 9.** — Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et soient A et B deux parties de F.

1. Montrer que si $A\subset B$ alors $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$.
2. Montrer que $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.
3. Montrer que $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.
4. Montrer que $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$.

***Exercice* 10.** — Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et soient A une partie de E et B une partie de F.

1. Montrer que $A\subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que $B\supset f(f^{-1}(B))$.
3. Montrer que si f et injective alors $A\supset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors $B\subset f(f^{-1}(B))$.

***Exercice* 11.** — On pose

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ x & \mapsto & x+1\end{array}\right. \quad \text{et } g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ y & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll}0 & \text{si } y=0\\ y-1 & \text{sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de chacune des applications f et g.
2. Calculer $g\circ f$ et $f\circ g$.

***Exercice* 12.** — Trouver 4 couples (I,J) d'intervalles de $\mathbb{R}$, tels que les applications $\sin : I\to J$ soient bien définies et soient respectivement

1. non injective et non surjective.
2. injective et non surjective.

3. surjective et non injective.
4. bijective.

***Exercice* 13.** — Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et g une application de F dans E.

1. Montrer que si $g \circ f = Id_E$ alors f est injective.
2. Montrer que si $f \circ g = Id_F$ alors f est surjective.

***Exercice* 14.** — On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective et calculer sa bijection réciproque.

***Exercice* 15.** — Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.

***Exercice* 16.** — Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

***Exercice* 17.** — On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Résoudre et discuter suivant les valeurs de A l'équation en x :

$$f(x) = A$$

3. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $Im(f)$.
4. En déduire que l'application $g : [1, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[$ définie par :

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

est bijective. Déterminer sa réciproque g^{-1}.

***Exercice* 18.** — Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} [1, +\infty[& \to &]0, 1] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 2}} \end{cases}$$

est bijective.