Université Paris Diderot 2013 - 2014

MM1- TD n°4

1.

a) Soit $a = r\, e^{i\alpha}$ un nombre complexe d'argument $\alpha \neq 0\ [2\pi]$ et de module $r \neq 0$. Soit z_0 un point choisi de $\mathbb{C}$. Montrer que la transformation (*similitude directe*)

$$z \in \mathbb{C} \mapsto a\,(z - z_0) + z_0 \in \mathbb{C}$$

fixe le *centre* z_0 et est la composée d'une rotation de centre z_0 et d'angle α et d'une homothétie de centre z_0 et de rapport r.

b) Montrer que la transformation

$$u \in \mathbb{C} \mapsto (\sqrt{3} + i)\,u + 1 + i \in \mathbb{C}$$

est du type décrit à la question a) et en préciser le centre fixe, l'angle de rotation et le rapport d'homothétie.

c) Montrer que la composée $\mathrm{R}_3 = \mathrm{R}_2 \circ \mathrm{R}_1$ d'une rotation R_1 de centre z_1 et d'angle $\alpha_1 \neq 0\ [2\pi]$ et d'une rotation R_2 de centre z_2 et d'angle $\alpha_2 \neq 0\ [2\pi]$, qui vérifient de plus $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0\ [2\pi]$, est une rotation d'angle $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ autour d'un centre z_3 que l'on précisera. A-t-on en général $\mathrm{R}_1 \circ \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_2 \circ \mathrm{R}_1$?

2. *a*) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, déterminer de deux façons différentes l'équation cartésienne de la droite D passant par les points $\mathrm{A} = (-2, 1)$, $\mathrm{B} = (1, 3)$.

b) Donner une représentation paramétrique de cette droite.

c) Déterminer les points d'intersection de D avec les axes Ox et Oy en se servant de l'équation cartésienne.

d) Déterminer les points d'intersection de D avec les axes Ox et Oy en se servant de la représentation paramétrique.

3. Déterminer l'équation cartésienne du plan P défini dans $\mathbb{R}^3$ par la représentation paramétrique

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = -2 + s + 2t \\ z = 3 - 3s + t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

4. Déterminer une représentation paramétrique du plan d'équation

$$2x + y - z + 4 = 0.$$

5. Montrer que l'intersection des plans P et P$'$ d'équations respectives

$$x + 6y - 2z + 1 = 0, \qquad 2x - 3y + z = 0$$

est une droite et en donner une représentation paramétrique.

6. Déterminer l'intersection des droites D et D$'$ ainsi définies par leurs représentations paramétriques dans le plan :

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases} \qquad (\mathrm{D}') \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

7. Déterminer les points d'intersection de la droite D définie par la représentation paramétrique $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 2t$ avec les trois plans de coordonnés $x\mathrm{O}y$, $y\mathrm{O}z$, $x\mathrm{O}z$. Faire une figure.

8. Soient $\mathrm{A} = (1, 2, -3)$ et $\mathrm{B} = (-1, 4, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Équations cartésiennes de la droite passant par les points A et B ?

9. Soient $\mathrm{A} = (1, 0, 2)$, $\mathrm{B} = (-1, 4, 2)$, $\mathrm{C} = (3, -2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.
b) Équation cartésienne du plan ABC ?

10. Les points $\mathrm{A} = (1, 1, 0)$, $\mathrm{B} = (2, 0, 1)$, $\mathrm{C} = (1, 2, 0)$, $\mathrm{D} = (-1, 4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan) ?

11. Soient $\mathrm{A} = (1, 2, -3)$ et $\mathrm{B} = (-1, 4, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Donner l'équation générale des plans passant par A et B.

12. Donner l'équation générale des plans passant par $\mathrm{A} = (1, 1, 1)$ et parallèles à $\mathrm{O}z$.

13. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes d'équations linéaires qui suivent

1.
$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x + y + 3z & = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y & -z = 0 \\ x + 5y & = 3 \\ 2x + y & -z = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + 2y & -z = 1 \\ 2x + y & +2z = 2 \\ x - 4y & +7z = 3 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y & +3z + 2t & = -2 \\ 2x + 3y & +4z + t & = -1 \\ 3x + 7y & +z - 6t & = 6 \end{cases}$$

14. Résoudre le système d'équations linéaires

(S)
$$\begin{cases} 2x - 2y & +3z = 1 \\ x + y & -z = 0 \\ 3x - y & -z = 2 \end{cases}$$

15. *a*) Pour quelles valeurs du paramètre réel m le système

(S)
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

est-il de rang maximum ? Résoudre le système dans ce cas, puis dans le cas contraire.
b) Résoudre le système (S′) en fonction de m

(S′)
$$\begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

(il y a une discussion à faire sur a, b, c).

16. En effectuant un pivot de Gauss sur les lignes du système (S), donner une équation cartésienne du plan défini par la représentation paramétrique

$$(S) \qquad \begin{cases} x = & 1 + s & -t \\ y = & 2 + s & +3t \\ z = & -1 + s & +t \end{cases}$$

17. À quelle condition sur a, b, c le système de trois équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + 3y = b \\ x + y = c \end{cases}$$

possède-t-il une solution ? Résoudre ce système quand il admet des solutions.

18. D'abord pour $a = b = 0$, ensuite pour (a, b) quelconque dans $\mathbb{R}^2$, résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} x - y & +z + t & = a \\ x + y & +2z - 2t & = b \end{cases}$$

19. Résoudre le système d'équations linéaires qui suit par la méthode du pivot, en discutant suivant les valeurs des paramètres réels λ et μ

$$(S) \qquad \begin{cases} x + y & +z + \lambda t & = 1 \\ x + y & -z & = \mu \\ \quad + 2y & -z & = 0 \\ x & +z & = 2 \end{cases}$$

Nota Bene. *Il n'est pas interdit, lors du calcul d'une forme échelonnée par le pivot de Gauss, ou bien d'échanger des lignes, ou bien d'échanger l'ordre d'apparition des variables simultanément dans toutes les lignes, ce qui peut minimiser l'occurrence d'un paramètre et la complexité des manipulations et des discussions.*