Université Paris Diderot 2013 - 2014

MM1- TD n°5

Les questions d'un même exercice peuvent être indépendantes.

Exo n

Exo n^o 1 **:** Montrer que $\dfrac{ln\,2}{ln\,3}$ est irrationnel.

Exo n^o 2 **:** Déterminer s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants:

$$\begin{array}{ll}]-1,2] & \{-2\}\cup]-1,2] \\ ]0,1[\cap\mathbb{Q} & \{x\in\mathbb{Q}; x^2<2\} \\ \{1/n;\ n\in\mathbb{N}^*\} & \{2-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\} \\ \{(-1)^n-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\} & \{\frac{n^2-1}{n^2+1};\ n\in\mathbb{N}^*\} \\ \{\frac{1}{n}\sin n;\ n\in\mathbb{N}^*\} & \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1-\frac{1}{n}] \\ \{2^{-n};\ n \text{ impair }\}\cup\{3^n;\ n \text{ pair }\} & \end{array}$$

Exo n^o 3 **:** Soient x, y et z des réels vérifiant :

$$\begin{array}{c} 1\leq x\leq 2 \\ -3\leq y\leq -1 \\ 2\leq z\leq 3 \end{array}$$

Encadrer les réels:

$$x-2y,\quad xy,\quad \frac{x-y}{z}.$$

Exo n^o 4 **:** Montrer que $max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exo n^o 5 **:** Soit x et y des réels strictement positifs. Montrer que les réels $\frac{x+y}{2}$, $\frac{2xy}{x+y}$, $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ et $\sqrt{xy}$ peuvent être rangés dans un ordre indépendant de x et y.

Exo n^o 6 **:** Soient x, y et z des réels. Montrer que:

(1) $x^2+y^2\geq 2xy$;
(2) $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$;

Exo n^o 7 **:** Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que:

(1) $sup(A\cup B)=max(supA,supB)$ et donner une égalité similaire pour $inf(A\cup B)$.
(2) $sup(A\cap B)\leq min(supA,supB)$ et donner une inégalité similaire pour $inf(A\cap B)$.
(3) $sup(-A)=-inf(A)$;
(4) $sup(A+B)=supA+supB$ et donner une égalité similaire pour $inf(A+B)$.
(5) si $A\subset B$ alors $supA\leq supB$ et $infB\leq infA$.

Exo n^o 8 **:** Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ tels que:
pour tous $x\in A$ et $y\in B$ on a $x\leq y$.

(1) Montrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.
(2) Montrer l'inégalité suivante : $supA\leq infB$.

Exo n^o 9 **:** Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que:

(1) $I \cap J$ est un intervalle.
(2) si $I \cap J$ est non vide alors $I \cup J$ est un intervalle.
(3) $I \cup J$ peut être un intervalle même si $I \cap J$ est vide.
(4) $I + J$ est un intervalle.

Exo n^o 10 **:** Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Montrer que $I \cap J = \emptyset$.

Exo n^o 11 **:** Soit f une application croissante de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même et soit A l'ensemble défini par $A = \{x;\ x \in [0, 1] \text{ et } x \leq f(x)\}$.

(1) Justifier que A admet une borne supérieure qu'on notera a.
(2) Justifier que $a \in [0, 1]$.
(3) Justifer que $f(a)$ est un majorant de A. En déduire que $a \leq f(a)$, puis que $f(a) \in A$ et en conclure que $f(a) = a$.
(4) Donner un exemple de fonction f où $a = 1$ et un exemple de f où $a < 1$.

Exo n^o 12 **:** Montrer que pour tous réels x et y on a :

(1) $|\,|x| - |y|\,| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.
(2) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
(3) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$;
(4) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

Exo n^o 13 **:** Résoudre les équations et les inéquations suivantes:

$|x + 2| = 1$ $\quad |x - 3| \leq 2$
$|x - 1| > 4$ $\quad |x - 2| \leq |x + 1|$
$|x - 1| + |x - 2| = 2$ $\quad |x^2 - 1| < |x + 1|$

Exo n^o 14 **:** $E(x)$ est la partie entière de x.

(1) Calculer $E(x) + E(-x)$;
(2) Montrer $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$;
(3) Montrer que $E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$ pour tout entier n.
(4) Montrer que
$$E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+1})$$
pour tout entier naturel n.

Exo n^o 15 **:** Soit $x \geq -1$. Montrer que $1 + nx \leq (1 + x)^n$ pour tout entier n.

Exo n^o 16 **:** Soit a et b deux réels positifs, montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}$.

Exo n^o 17 **:**

(1) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$;
(2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
(3) Montrer qu'entre deux rationnels il y a toujours un irrationnel.

Exo n^o 18 **:** Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.