Université Paris Diderot 2013 - 2014

Corrigé DM n°2

***Exercice* 1. —** On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S})\ \begin{cases} x-y+z &= m \\ mx+y-z &= 1 \\ x-y+mz &= 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel et x, y, z sont les inconnues.

1. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels $(\mathcal{S})$ admet une unique solution.

Réponse : On utilise le pivot de Gauss:

$$(\mathcal{S})\ \begin{cases} x - y + z = m \\ mx + y - z = 1 \\ x - y + mz = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 - mL_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y - (m+1)z = 1-m^2 \\ (m-1)z = 1-m \end{cases}.$$

Le pivot est fini. Pour avoir z on a envie de diviser par $m-1$, pour cela on doit supposer que $m-1\neq 0$ et finir de résoudre le système dans ce cas, mais après il faut aussi résoudre le système dans le cas $m-1=0$. Donc deux cas à considérer pour le dernier système qu'on appelle (S_1):

$$(S_1)\ \begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y - (m+1)z = 1-m^2 \\ (m-1)z = 1-m \end{cases}$$

le cas $m-1\neq 0$ puis le cas $m-1=0$, en d'autre termes il faut considérer le cas $m\neq 1$ puis le cas $m=1$.

DEUX CAS à traiter pour le système (S_1) Cas 1. $m\neq 1$ et Cas 2. $m=1$.

$\boxed{\text{Cas 1. } m\neq 1.}$

Reconsidérons le dernier système trouvé:

$$(S_1)\ \begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y - (m+1)z = 1-m^2 \\ (m-1)z = 1-m \end{cases}.$$

On est dans le cas $m\neq 1$ c-à-d $m-1\neq 0$, donc on peut diviser par $m-1$ pour trouver z. On a $z=\frac{1-m}{m-1}$, donc $z=-1$. Reportons cette valeur de $z=-1$ dans la deuxième ligne pour trouver y. Le système devient:

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y + (m+1) = 1-m^2 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à:

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y = -m(m+1) \\ z = -1 \end{cases}.$$

Maintenant pour trouver y on a envie de diviser par $m+1$. Donc deux cas se présentent pour ce dernier système qu'on appelle (S_2):

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & m \\ & & (m+1)y & & & = & -m(m+1) \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

le cas $m+1 \neq 0$ puis le cas $m+1=0$, en d'autre termes le cas $m \neq -1$ puis le cas $m=-1$.

DEUX CAS à traiter pour le système (S_2) Cas 1.1. $m \neq -1$ et Cas 1.2. $m=-1$.

(Ne pas oublier qu'on est toujours dans le Cas 1. $m \neq 1$.)

$\boxed{\boxed{\text{Cas 1.1. } m \neq -1.}}$

Puisqu'on est toujours dans le Cas 1. $m \neq 1$, donc on est dans la situation où $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
En considérant la deuxième ligne du dernier système traité (S_2), $m+1$ étant non nul (puisque on est dans le Cas 1.1 $m \neq -1$), on peut diviser par $m+1$ ce qui donne $y=-m$. On reporte cette valeur de $y=-m$ et celle de $z=-1$ dans la première ligne de (S_2), ce qui donne $x=1$.

D'où UNE SEULE SOLUTION :

$$\left\{\begin{array}{rc} x = & 1 \\ y = & -m \\ z = & -1 \end{array}\right. .$$

Donc $\boxed{\text{UNE SEULE SOLUTION dans le cas } m \neq 1 \text{ et } m \neq -1.}$

Fin du Cas 1.1. $m \neq 1$ (et $m \neq -1$) ■

Considérons maintenant le deuxième Cas 1.2. $m=-1$ à traiter pour le système (S_2).

$\boxed{\boxed{\text{Cas 1.2. } m = -1.}}$

En remplaçant dans le système (S_2)

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & m \\ & & (m+1)y & & & = & -m(m+1) \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

le paramètre m par la valeur -1, (S_2) devient:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right. .$$

Qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & -1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right. .$$

Il est clair qu'il y a dans ce cas une infinité de solutions.
Donc $\boxed{\text{dans le cas } m=-1 \text{ on a UNE INFINITÉ DE SOLUTIONS.}}$

Fin du Cas 1.2. $m=-1$ ■

On a fini de traiter le Cas 1.1. $m \neq -1$ et le Cas 1.2. $m = -1$ pour le système (S_2) et avec ça on vient de finir le Cas 1. $m \neq 1$ pour le système (S_1).

On revient maintenant au système (S_1) pour lequel on va considérer le deuxième Cas 2. $m = 1$.

$\boxed{\text{Cas 2. } m = 1.}$ En remplaçant m par 1 dans le système (S_1)

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & m \\ & & (m+1)y & - & (m+1)z & = & 1-m^2 \\ & & & & (m-1)z & = & 1-m \end{array}\right.$$

on obtient le système:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Il est clair qu'il y a dans ce cas une infinité de solutions.

Donc $\boxed{\text{dans le cas } m = 1 \text{ on a UNE INFINITÉ DE SOLUTIONS.}}$

Fin Cas 2.: $m = 1$ ■

En conclusion:

$$\boxed{\boxed{\boxed{\text{le système } (S) \text{ admet une et une seule solution si et seulement si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -1.}}}$$

2. Quelles sont les solutions de $(\mathcal{S})$ dans la cas $m = 1$.

Réponse : On pourrait utiliser le travail fait dans la question 1., mais comme il y a un risque d'enchevêtrement de cas il est préférable de commence par remplacer le paramètre m par la valeur 1 dans le système initial (S):

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{ccc} x - y + z & = & m \\ mx + y - z & = & 1 \\ x - y + mz & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce qui donne:

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{ccc} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 1 \\ x - y + z & = & 1 \end{array}\right.$$

Qui est équivalent à:

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{array}{ccc} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 1 \end{array}\right.$$

Appliquons la méthode du pivot, on obtient:

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \end{array}\quad \left\{\begin{array}{ccc} x - y + z & = & 1 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce qui donne:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = z \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions pour le système (S) avec $m = 1$ est

$$\boxed{\{(1, z, z);\ z \in \mathbb{R}\}}$$

***Exercice* 2.** — Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (-2, 3, 1, -1)$, $u_2 = (1, -2, -1, 1)$ et $u_3 = (1, -3, -2, 2)$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis donner un système d'équations de F.

Réponse : F possède un système générateur (u_1, u_2, u_3) contenant 3 vecteurs, donc sa dimension ne peut dépasser 3. La dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4. Ainsi F et $\mathbb{R}^4$ n'ont pas la même dimension, et donc il ne peuvent être égaux, d'où $F \neq \mathbb{R}^4$.

Pour obtenir un système d'équations (minimales) de F on pivote en ligne le tableau suivant,

$$\begin{array}{|rrr||c|} \multicolumn{1}{c}{u_1} & \multicolumn{1}{c}{u_2} & \multicolumn{1}{c}{u_3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ -2 & 1 & 1 & x \\ 3 & -2 & -3 & y \\ 1 & -1 & -2 & z \\ -1 & 1 & 2 & t \end{array}$$

et en fin de pivot dans le dernier tableau obtenu on cherche dans la colonne à droite de la double barre les expressions qui sont en face d'une suite de 0. Ces expressions correspondent aux équations de F.

$$\begin{array}{|rrr||l|} -2 & 1 & 1 & x \\ 3 & -2 & -3 & y \\ 1 & -1 & -2 & z \\ -1 & 1 & 2 & t \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ 3L_1 + 2L_2 \\ L_1 + 2L_3 \\ L_1 - 2L_4 \end{array} \begin{array}{|rrr||l|} -2 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -3 & 3x + 2y \\ 0 & -1 & -3 & x + 2z \\ 0 & -1 & -3 & x - 2t \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}(L_2 - L_3) \\ \frac{1}{2}(L_2 - L_4) \end{array} \begin{array}{|rrr||l|} -2 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & -3 & 3x + 2y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x + y - z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x + y + t} \end{array}$$

Dans le dernier tableau, dans la colonne à droite de la double barre seules les expressions $x + y - z$ et $x + y + t$ sont en face d'une suite de 0.
Donc un système d'équations (minimal) de F est:

$$F \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{array}\right.$$

Le système d'équation minimal contient 2 équations, donc la dimension de F est 2 qui est aussi le rang du système de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$. Résultat qu'on peut retrouver en pivotant en colonne comme dans la question qui suit.

2. Déterminer le rang du système de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$, la dimension de F puis donner une base $\mathcal{B}$ de F parmi la famille génératrice (u_1, u_2, u_3).

Réponse : On pivote en colonne le système de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$. Le rang de ce système est égale à la dimension de l'espace engendré par lui, c-à-d F, et il est égal au nombre de colonnes non nulles à la fin du pivot. Une base $\mathcal{B}$ de F parmi la famille génératrice (u_1, u_2, u_3) sera obtenue en traçant les colonnes tout le long du pivot.

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & c_1+2c_2 & c_1+2c_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & -3c_2+c_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array}$$

En fin de pivot on obtient 2 colonnes non nulles, donc $rang\{u_1, u_2, u_3\} = dimF = 2$. En fin de pivot, les colonnes non nulles ont les traces $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$. **Donc les colonnes au début du pivot qui ont pour traces $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ forment une base de F.** Les colonnes au début du pivot qui ont pour traces $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ sont u_1 et u_2, donc (u_1, u_2) est une base de F (parmi $\{u_1, u_2, u_3\}$ qui est un système générateur de F). Posons $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

3. Soit $w = (-1, 5, 4, -4)$. Montrer que $w \in F$ puis déterminer les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$.

Réponse : $(-1, 5, 4, -4)$ les coordonnées de w (dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) vérifient les équations de F

$$F \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+y+t=0 \end{array} \right.$$

donc w est dans F.

Les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de F sont deux nombres α et β tels que $w = \alpha u_1 + \beta u_2$. C'est-à-dire que α et β vérifient le système d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\alpha+\beta=-1 \\ 3\alpha-2\beta=5 \\ \alpha-\beta=4 \\ -\alpha+\beta=-4 \end{array} \right.$$

Système facile à résoudre qui possède une seule solution en (α, β) à savoir $\alpha = -3$ et $\beta = -7$. Donc $(-3, -7)$ sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}(u_1, u_2)$ de F.

4. Compléter la base $\mathcal{B}$ de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

Réponse : Utilisons le pivot en colonne dans la question 2. et plus précisément les colonnes non nulles du dernier tableau, c-à-d: $\left|\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|$ $\begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{2} \end{array}$

On rappelle que puisque les vecteurs du premier tableau du pivot dans la question 2. forment un système générateur de F alors les colonnes non nulles du dernier tableau du pivot forment une base de F.

Ces colonnes non nulles sont intéressantes car échelonnées et on pourra les compléter facilement en une base de $\mathbb{R}^4$.

Appelons $\mathcal{B}'$ la base de F formée de ces colonnes non nulles $\left|\begin{array}{rr} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|$.

$\mathcal{B}'$ contient 2 vecteurs, il manque 2 vecteurs à rajouter pour former une base de $\mathbb{R}^4$.
Les deux vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont échelonnés et il est facile de compléter ces deux vecteurs en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de 2 vecteurs de la base canonique
$\mathcal{C} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ de $\mathbb{R}^4$.

En effet considérons le système de vecteurs suivant $\left|\begin{array}{rrrr} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$ formé de 4 vecteurs: les 2 vecteurs de $\mathcal{B}'$ et de 2 vecteurs de la base canonique $\mathcal{C}$.
Ce système est échelonné, donc libre, il contient 4 vecteurs, et comme $dim\,\mathbb{R}^4 = 4$ alors c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
Ainsi on a pu compléter la base $\mathcal{B}'$ base de F en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide des vecteurs $\left|\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$ de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
En fait ce qu'on a fait pour $\mathcal{B}'$ est vrai pour n'importe quelle autre base de F.

Toute autre base de F à laquelle on rajoute les deux vecteurs $\left|\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$ donne une base de $\mathbb{R}^4$.

En particulier pour la base $\mathcal{B}$ de F, si on lui rajoute les deux vecteurs $\left|\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$ on obtient une base $\mathbb{R}^4$.

Donc le système de vecteurs $\left|\begin{array}{rrrr} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$ est une complétion de $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.