Université Paris Diderot 2013 - 2014

Corrigé Dst n°1

***Exercice* 1.**

1. Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes suivants :

   (a) $z_1 = \sqrt{3} - i$.

   Réponse : $z_1 = \sqrt{3} - i = re^{i\theta}$ avec $r = |z_1| = 2$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{|z_1|} = \dfrac{-1}{2}$.

   Il est clair que $\theta = -\pi/6$ à $2k\pi$ près. D'où

   $$z_1 = 2e^{-i\pi/6}.$$

   (b) $z_2 = 1 - i$.

   Réponse : $z_2 = 1 - i = re^{i\theta}$ avec $r = |z_2| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

   Il est clair que $\theta = -\pi/4$ à $2k\pi$ près. D'où

   $$z_2 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

   (c) $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

   Réponse : $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(-\pi/6-(-\pi/4)))} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$. D'où

   $$z = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

2. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

   Réponse : On vient de voir que $z = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$, donc

   $$z = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \quad (*).$$

   Calculons z d'une autre façon en utilisant les formes algébriques données au départ de z_1 et z_2. On a $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \dfrac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, donc

   $$z = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad (**).$$

   En identifiant les deux écritures algébriques de z obtenues dans $(*)$ et $(**)$, on a

   $$z = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

   Deux complexes égaux ont les mêmes parties réelles et imaginaires, donc

   $$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

et

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

D'où $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
Et enfin

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

***Exercice* 2.** Résoudre l'équation

$$z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$$

Réponse : $\Delta = -8 - 6i = (1-3i)^2$. Donc $z_1 = \frac{(3+i)+(1-3i)}{2}$ et $z_2 = \frac{(3+i)-(1-3i)}{2}$. D'où

$$z_1 = 2 - i \text{ et } z_2 = 1 + 2i.$$

***Exercice* 3.** Soit $g : \mathbb{C}\backslash\{i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par

$$g(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

1. Soit $A \in \mathbb{C}$. Résoudre et discuter suivant les valeurs de A l'équation en z :

$$g(z) = A$$

Réponse : $g(z) = A$ ssi $\dfrac{z+i}{z-i} = A$ ssi $(z+i) = A(z-i)$ ssi $z(1-A) = -iA - i$ ssi $z(A-1) = iA + i$.

Pour trouver z on a besoin de diviser par $A-1$, alors deux cas se présentent :

<u>Cas 1</u> : $A - 1 = 0$. C'est-à-dire $A = 1$.
La dernière équation $z(A-1) = iA + i$ devient $0 = 2i$, ce qui est impossible.

<u>Cas 2</u> : $A - 1 \neq 0$. C'est-à-dire $A \neq 1$.
La dernière équation $z(A-1) = iA + i$ donne une solution $z = \frac{iA+i}{A-1}$.

Résumons le nombre de solutions pour chaque A dans $\mathbb{C}$:

$A = 1$	$A \neq 1$
Pas de solution	Une solution

Autrement dit :

$A = 1$	$A \neq 1$
Pas d'antécédent	Un antécédent

2. g est-elle injective ? surjective ? Déterminer $g(\mathbb{C}\backslash\{i\})$

Réponse : D'après ces résumés :

(a) Chaque A dans $\mathbb{C}$ a au plus un antécédent, donc g est injective.

(b) $A = 1$ n'a pas d'antécédent, donc g n'est pas surjective.

(c) $g(\mathbb{C}\backslash\{i\})$ est l'ensemble des éléments de l'arrivée $\mathbb{C}$ qui ont au moins un antécédent. Or seuls les $A \neq 1$ ont au moins un antécédent, donc

$$g(\mathbb{C}\backslash\{i\}) = \{A \in \mathbb{C};\ A \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

3. En déduire que l'application $h : \mathbb{C}\backslash\{i\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{1\}$ définie par : $h(z) = g(z)$ est bijective. Déterminer sa réciproque h^{-1}.
   Réponse : Soit $A \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. L'équation $h(z) = A$ est équivalente à $g(z) = A$ (puisque $h(z) = g(z)$). Cette équation $g(z) = A$ admet une et une solution puisque $A \neq 1$ (d'après les résumés ci-dessus).
   Donc pour chaque A dans l'arrivée $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ l'équation $h(z) = A$ admet une et une solution $z = \frac{iA+i}{A-1}$ ce qui prouve que h est bijective et $h^{-1}(A) = \frac{iA+i}{A-1}$ et donc

$$h^{-1}(z) = \frac{iz+i}{z-1}.$$

***Exercice* 4.** Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Préciser les ensembles suivants : $B \cup B^c$, $A \cap E$, $A \cap A^c$.
   Réponse :
   - $B \cup B^c = E$.
   - $A \cap E = A$.
   - $A \cap A^c = \emptyset$.
2. Montrer que : $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
   Réponse : On factorise par A, on a : $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$.
3. En déduire que : $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B) = A \cap B$.
   Réponse : D'après la question 2. on a $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$, d'où
   $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B) = (A \cup B^c) \cap (A \cup B) \cap (A^c \cup B) = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$