

DM n°1

Question de cours – Donner les racines n -ièmes de l'unité, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Représenter graphiquement les racines *sixièmes* de l'unité sur le cercle trigonométrique.

Exercice 1. – Soit θ un nombre réel entre 0 et π .

1. Montrer que $-1 + e^{2i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)}(e^{i(\theta-\pi/2)} + e^{-i(\theta-\pi/2)})$.
2. En déduire le module et un argument du nombre complexe $-1 + \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$ en fonction de θ .

Exercice 2. – On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. En déduire les valeurs de z_1^n et z_2^n sous forme exponentielle puis sous forme algébrique, pour tout entier n .
3. Donner sous forme exponentielle les nombres complexes z tels que $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Exercice 3. – Résoudre l'équation $z^2 - 2z - \frac{11}{4} - 2i = 0$.

Exercice 4. – Soient F , G et H trois ensembles. Montrer que si $F \cup G = G \cap H$, alors $F \subset G$ et $G \subset H$.