

Question de cours – Donner la définition d'un système de vecteurs libres.

Exercice 1. – On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x - y + z & = & m \\ mx + y - z & = & 1 \\ x - y + mz & = & 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel et x, y, z sont les inconnues.

1. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels (\mathcal{S}) admet une unique solution.
2. Quelles sont les solutions de (\mathcal{S}) dans la cas $m = 1$.

Exercice 2. – Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $u_1 = (-2, 3, 1, -1)$, $u_2 = (1, -2, -1, 1)$ et $u_3 = (1, -3, -2, 2)$ et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par (u_1, u_2, u_3) .

1. Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis donner un système d'équations de F .
2. Déterminer le rang du système de vecteurs (u_1, u_2, u_3) , la dimension de F puis donner une base \mathcal{B} de F parmi la famille génératrice (u_1, u_2, u_3) .
3. Soit $w = (-1, 5, 4, -4)$. Montrer que $w \in F$ puis déterminer les coordonnées de w dans la base \mathcal{B} .
4. Compléter la base \mathcal{B} de F en une base de \mathbb{R}^4