Université Paris Diderot 2013 - 2014

Dst n°2

Question de cours – Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

***Exercice* 1.** On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + y + 2z & = & 1 \\ -x + my & = & -1 \\ x + 2y + (m+2)z & = & 2 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel et x, y, z sont les inconnues.

1. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels $(\mathcal{S})$ admet une unique solution.
2. Quelles sont les solutions de $(\mathcal{S})$ dans le cas $m = 2$.

***Exercice* 2.** Soit E le sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$E = \{(x, y, z) \; ; \; x + 3y - z = 0\}.$$

On considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, -2, 1),\; u_2 = (-2, 3, -1),\; u_3 = (-3, -1, 4)$$

et $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ le s-e-v de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs.

1. Justifier que E est un sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base $\mathcal{B}_0$ du s-e-v E ainsi que sa dimension.
3. Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F parmi u_1, u_2, u_3 et en déduire la dimension de F.
4. $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
5. Donner un système d'équations de F.
6. Donner une base de $E \cap F$ ainsi que sa dimension.

***Exercice* 3.** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f a-t-elle une limite en $-\infty$? en $+\infty$?
   Si oui calculer ces limites.