Université Paris Diderot 2013 - 2014

MM1- TD n°6

Les questions d'un même exercice peuvent être indépendantes.

Exo n^o 1 **:** Calculer les limites pour x tendant vers l'infini des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \quad ; \quad x \longmapsto x - \log x \quad ; \quad x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ .$$

Exo n^o 2 **:** Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(e^{u_n} + e^{-u_n})$ n'a pas de limite finie quand n tend vers l'infini. *Indication.* Poser $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et étudier les variations de $g(x) = f(x) - x$.

Exo n^o 3 **:** Donner, lorsqu'elles existent, les limites qui suivent

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} (\log(x^2+1) - 2\log x) \quad ;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^x}{1+e^x} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5x+1} - \sqrt{x^2+3}) \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} (x^3 + \cos x)\ .$$

Exo n^o 4 **:** Montrer que la fonction f, définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en $x = 0$, puis montrer que la fonction f, définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\,\sin(1/x)$ si $x \neq 0$, est continue en $x = 0$.

Exo n^o 5 **:** Montrer que $\lim_{n\to\infty} n^{2n+1} = +\infty$. Donner un entier N explicite tel que

$$n \geq N \to n^{2n+1} > 10^{100}.$$

(Celui qui trouve le plus petit N a gagné.)

Exo n^o 6 **:** Les fonctions f et g égales 0 en $x = 0$ et définies pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = \sin x\ \sin(\frac{1}{x}) \quad ; \quad g(x) = x^2\ \cos(\frac{1}{x^2})$$

sont-elles continues en 0 ?

Exo n^o 7 **:** On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $Y(x)$ égale 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x \geq 0$. Préciser les points où cette fonction est continue et ceux où elle ne l'est pas.

Exo n^o 8 **:** Montrer qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 quand $|x|$ tend vers ∞ est bornée. Atteint-elle ses bornes ? Donner des exemples.

Exo n^o 9 **:** On considère une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité $f^2(x) = 1$. Montrer que f est constante.

Exo n^o 10 **:** Donner un exemple de fonctions f et g vérifiant, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité $|f(x)| = |g(x)|$ et vérifiant aussi $f \neq g$ et $f \neq -g$; si f est continue sur $[0,1]$, la fonction g est-elle continue ?

Exo n^o 11 **:** On pose $h(x) = x^2 - 3x + 2$ pour tout x réel. Quels sont les intervalles maximaux $I = [a,b]$ sur lesquels h se restreint en une bijection h_I de I sur $h([a,b])$? Déterminer sur chacun de ces intervalles I la réciproque h_I^{-1} de h_I.

Exo n^o 12 **:** Préciser les valeurs qui sont prises plus d'une fois par la fonction $x \mapsto x^3 - x$.

Exo n^o 13 **:** Montrer qu'un polynôme de degré impair coefficients réels a au moins une racine réelle.

Exo n^o 14 **:** L'équation $\cos x\ \log x = 1$ a-t-elle une solution dans l'intervalle $]0,\infty[$?

***Exo n^o* 15** : On sait que si I est un intervalle fermé borné et f une fonction continue à valeurs réelles définie sur I, alors $f(I)$ est aussi un intervalle fermé borné. On peut montrer en revanche que si I est un intervalle qui n'est pas fermé borné, l'intervalle $f(I)$ peut être n'importe quel intervalle. Donner dans les cas suivants, par un dessin ou une formule, une fonction continue définie sur I telle que $f(I) = J$.

a) $I = \mathbb{R}$, $J = [0, +\infty[$; b) $I = \mathbb{R}$, $J =]0, 1[$; c) $I = \mathbb{R}$, $J = [0, 1]$; d) $I = [0, 1[$, $J = [0, +\infty[$; e) $I = [0, +\infty[$, $J = \mathbb{R}$; f) $I = [0, 1[$, $J = \mathbb{R}$.

***Exo n^o* 16** : On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = ln(1 + \frac{u_n}{n})$, pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout entier n.
b) En déduire que la suite $(\frac{u_n}{n})$ est convergente et en donner sa limite.
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
d) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $ln(1 + x) \leq x$.
e) En déduire que $0 \leq u_{n+1} < \frac{1}{n!}$

***Exo n^o* 17** : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = ln(1 + u_n)$, pour tout n.

a) Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout n.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

***Exo n^o* 18** : Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0, 1]$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 6x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{6}[\\ \dfrac{6x + 3}{2x + 5} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{6}, 1] \end{cases}$$

***Exo n^o* 19** : Déterminer les réels a, b et c pour que les fonctions f et g définies ci-dessous soient continues.

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} bx + c & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^2 - 2x + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

***Exo n^o* 20** : Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \longmapsto \sin x \ \sin \frac{1}{x}$.   2) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.
3) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 3x + 2}{|x + 1|}$.   4) $f : x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$.
5) $f : x \longmapsto \sin(x + 1) \ ln(|1 + x|)$.   6) $f : x \longmapsto \dfrac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|}$.

***Exo n^o* 21** : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin E(x)$, où $E(x)$ est la partie entière de x.

a) Etudier la continuité de f au point 3.
b) Déterminer les points où f est continue.

***Exo n^o* 22** : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

***Exo n^o* 23** : Soit f une application continue sur l'intervalle $[0, 1]$, et à valeurs dans $[0, 2]$.
Montrer qu'il existe un réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 2x$.

***Exo n^o* 24** : Une application qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Exo n^o 25 **:** Soit f, g deux applications continues, définies sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| = |g(x)|\,.$$

a) On suppose que l'application f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a $f = g$ ou $f = -g$.
b) Que peut-on conclure s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$?

Exo n^o 26 **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 telle que $f(x) = f(2x)$ pour tout réel x. Montrer que f est constante.

Exo n^o 27 **:** Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

Exo n^o 28 **:**

a) Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'image est :
$$i/\quad \mathbb{R}^* \text{ ?} \qquad ii/\quad]-1,\, 2[\cup]2,\, 3[\text{ ?} \qquad iii/\quad \{0,\ 1\} \text{ ?}$$
b) Que peut-on dire d'une application définie et continue sur un intervalle et prenant un nombre fini de valeurs (l'image est un ensemble fini) ?

Exo n^o 29 **:** Pour chacun des cas suivants, donner une application continue et surjective:
$$f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ f_2 : [0, +\infty[\to]0, +\infty[,\ \ f_3 :]-\infty, +\infty[\to]0, 1],$$
$$f_4 : [0, 1[\to]-\infty, +\infty[,\ \ f_5 :]0, 1[\to]0, 1],\ \ f_6 :]0, 1] \to [0, 1[,\ \ f_7 : [0, 1[\to]0, 1[.$$

Exo n^o 30 **:** Pour chacun des cas suivants, donner une application bijective et continue :
$$g_1 : [0, +\infty[\to]-\infty, 0],\ g_2 : [0, +\infty[\to]0, 1],\ \ g_3 :]0, 1[\to]-1, 2[,$$
$$g_4 : [0, 1[\to]-1, 2],\ \ g_5 : [0, 1[\to [0, +\infty[,\ g_6 :]0, 1[\to \mathbb{R}.$$