Université Paris Diderot 2013 - 2014

MM1- TD n°7

Exo n

Exo n^o 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes dont on précisera le domaine de définition.

$$f_1(x) = e^x \log(\sin x) \quad ; \quad f_2(x) = x^{\log x} \quad ; \quad f_3(x) = \log x \, \sin x \, \cos x \quad ; \quad f_4(x) = x\,(\log x - 1) \quad .$$

Exo n^o 2 : Déterminer les limites suivantes:

$$\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}(x \to 0) \qquad \frac{(1-\cos x)}{x^2}(x \to 0)$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\cos x - 1}(x \to 0) \qquad \frac{\tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}(x \to 0)$$

$$\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}(x \to \frac{\pi}{3}) \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}(x \to 0)$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}(x \to e) \qquad \frac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)^{1/3}-1}(x \to 0)$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}(x \to 0) \qquad x\ln(\sin x))(x \to 0^+)$$

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3}(x \to 0)$$

Exo n^o 3 : Calculer $\lim(1+\frac{x}{n})^n$.

Exo n^o 4 : Soit $\lambda > 0$. Calculer $\lim(1+\lambda^n)^{1/n}$.
En déduire $\lim(a^n+b^n)^{1/n}$, pour $a > 0$ et $b > 0$.

Exo n^o 5 : Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x|x|, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 \ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

$$s(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} , \quad t(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Exo n^o 6 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$ est bijective. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.

Exo n^o 7 : Justifier que l'on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Déterminer dans chaque cas une valeur de c.

Exo n^o 8 : Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $[0, 4]$?

Exo n^o 9 : Vérifier qu'on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$; quelle valeur de c obtient-on ?

Exo n^o 10 : Calculer (approximativement) $\sqrt{24}$ en appliquant la formule des accroissements finis.

Exo n^o 11 : Calculer $\sin 44°$ (même méthode).

Exo n^o 12 : Calculer les extrema de $f(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Exo n^o 13 : La courbe d'équation $y = x^3 - x + 5$ possède-t-elle une tangente passant par l'origine ?

Exo n^o 14 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle [a, b] avec $a = 0$ et $b = 3$ et calculer la quantité réelle c qui intervient dans cette formule.

Exo n^o 15 : Soient p et q des nombres réels et un entier $n > 0$. On pose $f(x) = x^n + px + q$.
(1) Montrer que si f admet k racines réelles, f' en admet au moins $k - 1$.
(2) En déduire que si n est pair, f a au plus 2 racines réelles et que si n est impair, f en admet au plus 3.

Exo n^o 16 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$.
(1) Calculer la quatité réelle c qui intervient dans la formule du théorème des accroissements finis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
(2) Quelle est la valeur de $\theta \in]0, 1[$ dans la formule des accroissements finis $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$.

Exo n^o 17 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 + x}$ et $x_0 = 2$.
(1) Montrer que pour tout réel h tel que $x_0 + h \in D_f$, il existe $\theta \in]0, 1[$ unique tel que

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

(2) Calculer la limite $\lim\limits_{0} \dfrac{\theta(h)}{h}$.

Exo n^o 18 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 1}$. Soit u_n la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, pour tout entier n.
(1) Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
(2) Montrer que la suite (u_n) est convergente, que sa limite $l \in [1, 2]$ et qu'elle vérifie $f(l) = l$.
(3) Montrer que pour tout réels, $x, y \in [1, 2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
En déduire que $|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n.
(4) Trouver un entier n tel que $|u_n - l| \leq \frac{1}{1000}$.

Exo n^o 19 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq x$.
(1) Montrer que $f'(0) \geq 1$.
(2) Montrer que, quel que soit x strictement positif, il existe un réel c dans $]0, x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.