Théorie des modèles : les outils classiques

Françoise Point

point@math.univ-paris-diderot.fr

31 mars 2016

Table des matières

Chapitre 1

Rappels.

1.1 Espaces de Stone.

Dans ce chapitre, nous allons, à un langage $\mathcal{L}$ donné, considérer l'espace de toutes les $\mathcal{L}$-théories complètes, sur lequel nous allons mettre une topologie, pour laquelle cet espace sera Hausdorff et compact.

Définition 1.1 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistente. Par commodité, on supposera que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante.

Soit $S_0(T)$ l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$. Un point de $S_0(T)$ est donc l'ensemble de toutes les conséquences d'une théorie complète qui contient T, ou encore est de la forme $Th(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} \models T$.

On munit $S_0(T)$ d'une topologie de la façon suivante.

On définit $[\tau] := \{p \in S_0(T) : \tau \in p\}$, où τ parcourt les $\mathcal{L}$-énoncés. Notons que, pour τ_1, τ_2 deux $\mathcal{L}$-énoncés, on a :

$[\tau_1] \cap [\tau_2] := [\tau_1 \wedge \tau_2]$.

$[\tau_1] \cup [\tau_2] := [\tau_1 \vee \tau_2]$.

$[\neg\tau] = S_0(T) - [\tau]$ (noté $[\tau]^c$).

$S_0(T) = [c = c]$ et $\emptyset = [c \neq c]$.

On prend comme *base d'ouverts* : $\{[\tau] :\ \tau$ est un $\mathcal{L}$-énoncé $\}$. On notera l'espace topologique correspondant $\mathcal{S}_0(T)$. Notons que $[\tau] = [\neg\tau]^c$ (et donc c'est aussi un fermé).

Remarque : Une $\mathcal{L}$-théorie complète p est finiment axiomatisable s'il existe un $\mathcal{L}$-énoncé τ tel que $\{p\} = [\tau]$.

Rappelons qu'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il est *Hausdorff* (ou séparé) si pour toute une paire de points $\{p_1, p_2\}$ on peut trouver deux ouverts disjoints O_1, O_2 tels que $p_1 \in O_1$ et $p_2 \in O_2$.

Proposition 1.2 *L'espace $\mathcal{S}_0(T)$ est séparé et compact.*

Preuve : Montrons que $\mathcal{S}_0(T)$ est Hausdorff (de façon équivalente séparé). Soient $p_1 \neq p_2 \in S_0(T)$. Il existe donc $\sigma \in p_1 - p_2$ (et donc $\neg\sigma \in p_2$). On a donc $p_1 \in [\sigma]$ et $p_2 \in [\neg\sigma]$ et $[\sigma] \cap [\neg\sigma] = \emptyset$.

Soit $S_0(T) = \cup_{i\in I}[\tau_i]$. Donc $\emptyset = \cap_{i\in I}[\neg\tau_i]$. Autrement dit, $T \cup \{\neg\tau_i : i \in I\}$ est inconsistente. Par le théorème de compacité, une partie finie E de cette théorie est inconsistente (et on peut supposer que toute partie propre de E est consistente). Comme T est consistente, cette partie finie E n'est pas incluse dans T. Soient $\neg\tau_{i_1}, \cdots, \neg\tau_{i_n} \in E - T$. Donc toute théorie complète qui contient T et $\bigwedge_{1\leq j\leq n-1} \neg\tau_{i_j}$ contient τ_{i_n}. Autrement dit $S_0(T) = \bigcup_{1\leq j\leq n}[\tau_{i_j}]$ (et ce recouvrement est minimal). $\square$

Corollaire 1.3 *Tout ouvert-fermé (i.e. tout ouvert qui est aussi un fermé) de $\mathcal{S}_0(T)$ est de la forme $[\sigma]$, pour un certain $\mathcal{L}$-énoncé σ.*

Preuve : Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i\in I}[\tau_i]$, s'il est fermé son complémentaire dans $S_0(T)$ est de la même forme i.e. $\bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$ et donc $S_0(T) = \bigcup_{i\in I}[\tau_i] \cup \bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$. Par la Proposition 1.2, il existe un sous-recouvrement fini c.a.d. il existe $I_1 \subset I$ et $J_1 \subset J$ finis tels que $S_0(T) = \bigcup_{i\in I_1}[\tau_i] \cup \bigcup_{j\in J_1}[\sigma_j]$. Comme $\bigcup_{i\in I_1}[\tau_i]$ est inclus à $\bigcup_{i\in I}[\tau_i]$, $\bigcup_{j\in J_1}[\sigma_j] \subset \bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$ et que ces deux ensembles sont disjoints, l'ouvert-fermé de départ est égal à $\bigcup_{i\in I}[\tau_i] = [\bigvee_{i\in I_1} \tau_i]$. $\square$

Soit Σ une $\mathcal{L}$-théorie, on associe à Σ un fermé F_Σ de l'espace $\mathcal{S}_0$: $F_\Sigma := \bigcap_{\sigma\in\Sigma}[\sigma]$.

Exercice : Montrez que si $F_\Sigma \neq \emptyset$ ssi Σ est consistente. Montrez que pour Σ_1 une $\mathcal{L}$-théorie, Σ et Σ_1 sont équivalentes ssi $F_\Sigma = F_{\Sigma_1}$ et que Σ est finiment axiomatizable ssi il existe un énoncé τ tel que $F_\Sigma = [\tau]$.

Proposition 1.4 *Une classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures est finiment axiomatizable ssi $\mathcal{K}$ et son complémentaire $\mathcal{K}^c$ dans la classe de toutes les $\mathcal{L}$-structures sont élémentaires.*

Preuve : ($\rightarrow$) C'est immédiat car par définition il existe Σ_1 fini tel que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma_1)$ et donc en posant $\tau := \bigwedge_{\sigma\in\Sigma_1} \sigma$, $\mathcal{K} = Mod(\tau)$. Ainsi, on a $\mathcal{K}^c = Mod(\neg\tau)$.

($\leftarrow$) Puisque $\mathcal{K}$ est élémentaire, il existe une $\mathcal{L}$-théorie Σ (respectivement Σ') telle que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ (respectivement $\mathcal{K}^c = Mod(\Sigma')$). Soit F_Σ (respectivement $F_{\Sigma'}$) le fermé correspondant de $\mathcal{S}_0(T)$. Comme ces deux fermés sont disjoints et complémentaires (en effet supposons qu'il existe $p \in F_\Sigma \cap F_{\Sigma'}$, et soit $\mathcal{A} \models p$, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$; s'il existe $p \in \mathcal{S}_0 - (F_\Sigma \cup F_{\Sigma'})$ et si $\mathcal{B} \models p$, alors $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ and $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}^c$, une contradiction). Par le Corollaire 1.3, l'ouvert-fermé F_Σ est de la forme $[\tau]$, et donc $\mathcal{K}$ est axiomatisable par τ.

On peut aussi faire une preuve directe de ($\leftarrow$).

Supposons qu'au contraire que pour tout $\sigma \in Th(\mathcal{K})$, il existe $\mathcal{M}_\sigma \in \mathcal{K}^c$ et $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$. Posons $J_\sigma = \{\tau \in Th(\mathcal{K}) : \ \mathcal{M}_\tau \models \sigma\} \neq \emptyset$. Cet ensemble de sous-ensembles de $Th(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\sigma\in Th(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma/U \models Th(\mathcal{K})$. En effet pour tout $\tau \in Th(\mathcal{K})$, $J_\tau \in U$ et donc $\prod_{Th(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma/\mathscr{U} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$. (En effet, $\mathcal{K}$ est élémentaire et donc $\mathcal{K} = Mod(Th(\mathcal{K}))$ et $\mathcal{K}^c$ est fermée par ultraproduits.)
$\square$

Remarque : Si $\mathcal{K}_\sigma$ est une classe de $\mathcal{L}$-structures axiomatisée par un $\mathcal{L}$-énoncé σ, et si $\mathcal{K}$ est une classe élémentaire de $\mathcal{L}$-structures telle que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, alors : $\mathcal{K}$ est finiment axiomatisable ssi $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est élémentaire.
La preuve est similaire à celle de la proposition 1.4, en voici une idée :

($\rightarrow$) Soit τ un $\mathcal{L}$-énoncé axiomatisant $\mathcal{K}$. La classe $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est axiomatisée par σ & $\neg\tau$.

($\leftarrow$) (preuve topologique) $F := \bigcap_{\mathcal{K}\models\tau}[\tau]$ est un fermé. Soit $[\sigma]$ l'ouvert-fermé correspondant à $\mathcal{K}_\sigma$. Par hypothèse $F_1 := [\sigma]\setminus F$ est fermé ; $[\sigma] = F \sqcup F_1$; donc F est un ouvert-fermé (avec $\sqcup$ dénotant l'union disjointe) et donc de la forme $[\tau]$, pour un certain $\mathcal{L}$-énoncé τ.

($\leftarrow$) (preuve par ultraproduits) Comme $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, si $\tau \in Th(\mathcal{K})$, alors τ & $\sigma \in Th(\mathcal{K})$. Si $\mathcal{K}$ n'était pas finiment axiomatisable, pour tout $\tau \in Th(\mathcal{K})$, il existerait $\mathcal{M}_\tau \notin \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}_\tau \models \tau$ & σ (et donc $\mathcal{M}_\tau \in \mathcal{K}_\sigma$). Posons $J_\tau = \{\chi \in Th(\mathcal{K}) :\ \mathcal{M}_\chi \models \tau \&\ \sigma\} \supset \{\tau\}$. Cet ensemble de sous-ensembles non-vides de $Th(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\chi\in Th(\mathcal{K})}\mathcal{M}_\chi/\mathscr{U} \models Th(\mathcal{K})$. Or comme $\mathcal{K}_\sigma\setminus\mathcal{K}$ est fermée par ultraproduits, cet ultraproduit appartient $\mathcal{K}_\sigma\setminus\mathcal{K}$. Mais par construction $\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_\chi \models Th(\mathcal{K})$ et donc comme $\mathcal{K}$ est élémentaire, $\prod_{\mathscr{U}}\mathcal{M}_\chi \in \mathcal{K}$, une contradiction. $\square$

1.2 Espaces de types et saturation.

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistente. Nous avons défini l'espace topologique $\mathcal{S}_0(T)$ des $\mathcal{L}$-théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$.

Lorsque T est une théorie complète, $\mathcal{S}_0(T)$ est un singleton. Et donc, nous allons associer à T une suite d'espaces topologiques que l'on obtient en enrichissant le langage $\mathcal{L}$ par un ensemble de constantes qui n'apparaissent pas déjà dans $\mathcal{L}$.

Le théorème de Ryll-Nardweski caractérise les théories complètes T, pour lesquelles tous les espaces $\mathcal{S}_n(T)$ sont finis, $n \in \mathbb{N}$: ce sont les théories $\aleph_0$-catégoriques.

Définition 1.5 L'ensemble $S_1(T)$, respectivement $S_n(T)$, est l'ensemble des $\mathcal{L}\cup\{c_1\}$-théories complètes T_1 qui contiennent T et telles que $\bar{T}_1 = T_1$ (c.a.d. maximales comme ensembles d'énoncés), respectivement l'ensemble des $\mathcal{L}_{\bar{c}} := \mathcal{L}\cup\{c_1,\cdots,c_n\}$-théories complètes T_n qui contiennent T et telles que $\bar{T}_n = T_n$ (où $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de nouveaux symboles de constantes (c.a.d. qui n'apparaissent pas déjà dans $\mathcal{L}$).

Dans $S_n(T)$, on prend comme base d'ouverts $[\phi(\bar{c})]$, où $\phi(\bar{x})$ parcourt les $\mathcal{L}$-formules à n variables libres.

Les espaces topologiques $\mathcal{S}_n(T)$ correspondants sont séparés et compacts (voir Proposition 1.2).

A un point de $S_n(T)$, on associe l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules à n-variables libres obtenu en remplaçant $c_1,\cdots,c_n$ par $x_1,\cdots,x_n$ et cet ensemble de $\mathcal{L}$-formules est appelé *un n-type complet* (voir chapitre **??**). *On fera l'abus de langage et notation suivant. On dira que ce n-type complet appartient à $S_n(T)$.*

Un ensemble de $\mathcal{L}$-formules à n variables libres est un n-type s'il peut être complété en un n-type complet.

Soit $\mathcal{M} \models T$, à $p \in S_n(T)$, on associe le sous-ensemble de M^n (infiniment définissable) suivant : $\bigcap_{\phi\in p}\phi(M)$.

Soit $\mathcal{M} \models T$ et soit $A \subset M$; notons $Th_A(\mathcal{M})$, la théorie de $\mathcal{M}$ dans le langage $\mathcal{L}_A := \mathcal{L}\cup\{c_a :\ a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante qui n'appartient pas à $\mathcal{L}$.

On note $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$, l'espace $\mathcal{S}_n(Th_A(\mathcal{M}))$. Soit $\bar{m} \in M^n$, on note $tp_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, ou $p_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, l'ensemble des $\mathcal{L}_A$-formules $\phi(v_1,\cdots,v_n)$ telles que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$.

Exercice : Pour tout n-type complet $p(\bar{x}) \in S_n(T)$, il existe $\mathcal{M} \models T$ et $\bar{a} \subseteq M^n$ tels que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ soit égal à $p(\bar{x})$.

Lemme 1.6 *Un espace topologique X compact et infini admet un point non isolé.*

Preuve : En effet, supposons que tout point de X est isolé, ie : $\forall x \in X, \{x\}$ est ouvert. Alors $\bigcup_{x\in X}\{x\}$ est un recouvrement de X, qui est compact. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $\bigcup_{x\in X'}\{x\}$. Or X est infini et $X^{'}$ est fini : contradiction. $\square$

1.3 Théorème d'omission des types et théories $\aleph_0$-catégoriques

Définition 1.7 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistente, et $\mathcal{M}$ un modèle de T. On dira qu'un n-type $p(\bar{x})$ consistent avec T est omis dans $\mathcal{M}$ s'il n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$ c.a.d. où aucun n-uples de M ne réalise $p(\bar{x})$.
On dira qu'un n-type complet $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ est un point non isolé (de $\mathcal{S}_n(T)$) si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(\bar{x})$ à n variables libres, $[\phi(\bar{c})] \neq \{p(\bar{c})\}$. Si $p(\bar{c}) \in [\phi(\bar{c})]$ et $p(\bar{c})$ non isolé, alors il existe $\theta(\bar{x}) \in p(\bar{x}), T \cup \{\phi(\bar{c})\} \not\models \theta(\bar{c})$ (voir section 1.2).

Théorème 1.8 (Théorème d'omission des types.) *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie consistente. Soit $p(\bar{c}) \in \mathcal{S}_n(T)$ un point non isolé. Alors il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T où ce type p est omis.*

Preuve : On étend itérativement T en une $\mathcal{L}^*$-théorie T^* complète (où $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^*$) telle que si $\mathcal{M} \models T^*$, on aura une sous-$\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{M}_0$ qui sera un modèle dénombrable de T, omettant p. Chaque "étape itérative" sera divisée en trois sous-étapes, afin d'assurer complétude, test de Tarski-Vaught, omission de p.

On enrichit $\mathcal{L}$ en y ajoutant un ensemble infini dénombrable C de nouveaux symboles de constante : $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup C$.
On énumère les $\mathcal{L}^*$-énoncés : $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$; ainsi que les n-uples de constantes de C : $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \ldots$
On peut maintenant construire T^* en ajoutant à T des énoncés $\theta_n, n \in \omega$ de la façon suivante :
<u>étape 0</u> : on pose $\theta_0 := \forall x(x = x)$

On suppose maintenant que θ_s, pour un certain s appartenant à ω, a été construit, que $T \cup \{\theta_s\}$ est une $\mathcal{L}^*$-théorie consistente, et telle que pour chaque $n < s$ on ait $T \cup \{\theta_s\} \models \theta_n$.
<u>étape $s+1$</u> :
cas où <u>$s+1 = 3i+1$</u> (ie s est un multiple de 3) :
Si $T \cup \{\theta_s, \varphi_i\}$ est consistente, on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \varphi_i$; sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \neg\varphi_i$. Dans les deux cas $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente, et $T \cup \{\theta_{s+1}\} \models \theta_s$ (et donc satisfait aussi θ_n,pour $n < s$).
Notons que cela nous servira plus tard dans la preuve pour obtenir une théorie T^* complète.
<u>$s+1 = 3i+2$</u> :
(Remarque : par rapport à la sous-étape précédente, cette "sous-étape-ci" permet d'itérer sur s sans itérer sur i)
-Si φ_i est de la forme $\exists v\, \psi(v)$ pour une certaine formule $\psi(v)$ (de complexité quelconque), et

que $T \models \theta_s \to \varphi_i$, on prend une constante c dans C qui n'apparait pas dans $T \cup \{\theta_s\}$, afin de construire un témoin de la satisfaisabilité de ψ. On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \psi(c)$. Puis, étant donné que dans un modèle $\mathcal{N}$ de $T \cup \{\theta_s\}$, il existe $a \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \psi(a)$, on pose $c^{\mathcal{N}} = a$, on a alors $\mathcal{N} \models T \cup \{\theta_{s+1}\}$. On a donc que $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente.
-Sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s$.
$\underline{s+1 = 3i+3}$:
On construit une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{v})$ à partir de θ_s et de $\bar{d}_i$ de la façon suivante : on remplace $\bar{d}_i$ par un n-uple de variables $\bar{v}$ dans θ_s, et on remplace chaque autre symbole de constante $c \in C \setminus \bar{d}_i$ qui apparait dans θ_s par une variable v_c. Puis on quantifie existentiellement les variables v_c. (les variables de $\bar{v}$ sont donc libres dans la nouvelle formule, tandis que les variables v_c sont liées)
Comme p n'est pas isolé, $[\varphi(\bar{v})] \neq \{p\}$; il y a donc une formule $\sigma(\bar{v}) \in p$ telle que $T \not\models \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \to \sigma(\bar{v}))$ (*) (voir la discussion avant la Définition 1.7). On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \ \& \ \neg\sigma(\bar{d}_i)$, afin que $\bar{d}_i$ ne satisfasse pas p dans le modèle que l'on veut construire (i.e. $T \cup \{\varphi(\bar{d}_i)\} \not\models p$).
$T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente car d'après (*), il existe $\mathcal{N}$ modèle de T et $\bar{a} \subseteq N$ tel que $\varphi(\bar{a})$ et $\neg\sigma(\bar{a})$. En posant $\bar{d}_i^{\mathcal{N}} = \bar{a}$, et en interprétant les constantes $c \in C \setminus \bar{d}_i$ comme les témoins de l'existence des v_c, $\mathcal{N}$ est un modèle de $T \cup \{\theta_{s+1}\}$.
Donc $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistente et satisfait θ_s.

Posons maintenant $T^* = T \cup \{\theta_n : n \in \omega\}$. T^* est consistente car finiment consistente, et elle est complète car aux étapes $3i+1$ on a ajouté soit φ_i, soit $\neg\varphi_i$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}^*$-structure satisfaisant T^*. On pose $M_0 = \{c^{\mathcal{M}} : c \in C\}$. M_0 est dénombrable car C l'est. M_0 est le domaine d'une $\mathcal{L}$-sous-structure $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}_{\restriction \mathcal{L}}$, et c'est une sous-structure élémentaire (étapes $3i+2$, complétude de T^* et Test de Tarski-Vaught (voir chapitre **??**) :
Soit $\phi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule et $\bar{a} \subseteq M_0$. Supposons que $\mathcal{M}_{\restriction \mathcal{L}} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$. Comme $\bar{a} = \bar{d}^{\mathcal{M}}$ pour un $\bar{d} \subseteq C$, en posant $\varphi := \exists x \phi(x, \bar{d})$: φ est un $\mathcal{L}^*$-énoncé et donc de la forme φ_i pour un certain $i \in \omega$. Comme $\mathcal{M} \models \varphi_i$ et que $\mathcal{M}$ est un modèle de T^* qui est complète, on a : $T^* \models \varphi_i$. Il existe donc s tel que $T \models \theta_s \to \varphi_i$; et donc par construction (étapes 3i+2), il existe une constante $c \in C$ qui n'apparait pas dans $T \cup \{\theta_s\}$ telle que $\theta_{s+1} = \theta_s \,\&\, \phi(c, \bar{d})$ avec $\theta_{s+1} \in T^*$. Comme $\mathcal{M} \models T^*$, $\mathcal{M} \models \phi(c^{\mathcal{M}}, \bar{a})$, or $c^{\mathcal{M}} \in M_0$ et donc par le test de Tarski-Vaught, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}_0$ ne réalise pas p : soit $\bar{a} \in M_0^n$, alors il existe $\bar{d}_i$ tel que $\bar{d}_i^{\mathcal{M}_0} = \bar{a}$. A l'étape $3i+3$, on a posé $\theta_{s+1} = \theta_s \ \& \ \neg\sigma(\bar{d}_i)$, où $\sigma \in p$.
□

1.4 Modèles atomiques et va-et-vient

Définition 1.9 Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Un modèle $\mathcal{M}$ de T est *atomique* si pour tout $n \in \omega$ le type d'un n-uple d'éléments de $\mathcal{M}$ est isolé, ie : pour tout n-uple $\bar{a}$ d'éléments de M, $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est un point isolé dans $\mathcal{S}_n(Th(\mathcal{M}))$.

Notons que si T est une $\mathcal{L}$ théorie complète, toute paire de modèles atomiques $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ de T réalisent les mêmes types. Soit $p \in \mathcal{S}_n(T)$ et supposons que $\mathcal{M}$ réalise p. Il existe donc un n-uple $\bar{a}$ d'éléments de M tel que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = p$. Par hypothèse, $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé et donc il existe une formule $\phi(\bar{x})$ telle que $[\phi(\bar{x})] = \{p\}$. Comme T est complète, $\exists \bar{x}\ \phi(\bar{x})$ est une conséquence de T et donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{x}\ \phi(\bar{x})$. Soit $\bar{b} \subset N$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$. Par hypothèse sur ϕ, $tp^{\mathcal{N}}(\bar{b}) = p$.

Lemme 1.10 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ sont deux modèles dénombrables atomiques de T qui réalisent les mêmes éléments de $\bigcup_{n\in\omega} S_n(T)$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes.*

Preuve : Cette preuve est basée sur la technique de "va et vient" entre deux structures, comme la preuve du Théorème de Cantor **??**. On énumère les éléments de M et B en les indexant par $n \in \omega$: $M = \{m_n : n \in \omega\}$ $B = \{b_n : n \in \omega\}$.
Soit donc m_0 le premier élément de M, $tp^{\mathcal{M}}(m_0) \in S_1(T)$ est isolé par hypothèse donc $tp^{\mathcal{M}}(m_0) = [\psi_0(x_0)]$, où ψ_0 est un $\mathcal{L} \cup \{x_0\}$-énoncé. $\mathcal{B}$ réalisant les mêmes types que $\mathcal{M}$, on peut choisir parmi les éléments de B réalisant $tp^{\mathcal{M}}(m_0)$, un élément b_i avec i minimum. On renomme cet élément $b_0^{'}$; et on pose $m_0^{'} := m_0$.
Soit maintenant $b_j \in B \setminus \{b_0^{'}\}$ tel que j soit minimum ; on le renomme $b_1^{'}$ et on considère $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, b_1^{'}) \in S_2(T)$.
Soit $\psi_1(x_0, x_1)$ la formule isolant $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, b'_1)$.

$$\mathcal{B} \models \psi_0(b_0^{'}) \to \exists x_1 \psi_1(b_0^{'}, x_1)$$

Donc la formule "$\psi_0(x_0) \to \exists x_1 \psi_1(x_0, x_1)$" est dans $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}) = tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'})$ Il existe donc $m_k \in M \setminus \{m_0^{'}\}$ tel que $\psi_1(m_0^{'}, m_k)$. On peut choisir k minimum, comme fait précd́emment.
Remarque : dans $\mathcal{B}$, $b_1^{'} \neq b_0^{'}$, donc ces deux éléments vérifient la formule "$x_0 \neq x_1$". c'est pour cela que, par complétude de $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, b_1^{'})$, on peut prendre aussi deux éléments différents dans $\mathcal{M}$ (En fait on a : $\psi_1(x_0, x_1) \to x_0 \neq x_1$).
On pose $m_1^{'} := m_k$.
On prend ensuite le premier élément de $M \setminus \{m_0^{'}, m_1^{'}\}$, etc...
On obtient alors deux séquences infinies dénombrables $m_0^{'}, m_1^{'}, \ldots$ et $b_0^{'}, b_1^{'}, \ldots$ telles que :

$$M = \{m_0^{'}, m_1^{'}, \ldots\} \quad B = \{b_0^{'}, b_1^{'}, \ldots\}$$

(notons qu'en prenant les indices minimaux, on n'oublie aucun élément ; ie on a considéré tous les éléments de $\mathcal{M}$ et tous ceux de $\mathcal{B}$).
Soit $f : m_n^{'} \mapsto b_n^{'}$. Par construction, pour chaque n les n-uples $(m_0^{'}, \ldots, m_{n-1}^{'})$ et $(b_0^{'}, \ldots, b_{n-1}^{'})$ satisfont les mêmes types, f définit donc un isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}$.

(Remarque : deux uples quelconques $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$ et $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ satisfont eux aussi les mêmes types : en effet il existe l, $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \subseteq (m_0^{'}, \ldots, m_l^{'})$, avec $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que $m_{i_1} = m_{j_1}^{'}, \ldots, m_{i_k} = m_{j_k}^{'}$. Remarquons que $tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}, \ldots, m_k^{'}) \supseteq tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}), \ldots, tp^{\mathcal{M}}(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$.
Par définition de f, on a

$$(f(m_{i_1}), \ldots, f(m_{i_k})) \subseteq (b_0^{'}, \ldots, b_l^{'})$$

donc $tp^{\mathcal{B}}(f(m_{i_1}), \ldots, f(m_{i_k})) \subseteq tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, \ldots, b_l^{'}) = tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}, \ldots, m_k^{'})$.) □

1.5 Théorème de Ryll-Nardweski

Théorème 1.11 (Théorème de Ryll-Nardewski). *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie complète et supposons que T n'a que des modèles infinis.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est $\aleph_0$-catégorique ;

(ii) pour tout n, $S_n(T)$ est fini ;

(iii) pour tout n, il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, dans tout modèle de T.

Preuve : (i) $\rightarrow$ (ii) :
Supposons que T est $\aleph_0$-catégorique et qu'il existe n tel que $S_n(T)$ soit infini. L'espace $\mathcal{S}_n(T)$ est compact donc il admet alors un point non isolé p. Par le théorème d'omission des types, il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T où p n'est pas réalisé.
Soit $\mathcal{N} \models T$ tel que $\mathcal{N}$ réalise p (p est consistent avec T), ie : $\exists a_1, \cdots, a_n \in N, p = tp^{\mathcal{N}}(\bar{a})(= \{\phi(v_1, \cdots, v_n)\ \mathcal{L}\text{-formules} : \ \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})\})$.
Par le théorème de Löwenheim-Skolem, il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{N}$ qui contient $\bar{a}$ et qui est infinie dénombrable. On a donc $|\mathcal{N}_0| = |\mathcal{M}| = \aleph_0$, tandis que $\mathcal{M} \ncong \mathcal{N}_0$, ce qui contredit la catégoricité de T.

(ii) $\rightarrow$ (iii) On va montrer un résultat un peu plus fort : pour n fixé, $S_n(T)$ est fini implique qu'il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute autre formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, i.e. il existe

$$\psi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \psi_m(x_1, \cdots, x_n)$$

telles que, pour $\phi(x_1, \cdots, x_n)$, il existe $i \in \{1, \ldots, m\}, T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}))$.
$S_n(T)$ est fini par hypothèse : soient donc $\theta_1, \cdots, \theta_k$ des formules à n variables libres telles que $[\theta_i] = \{p_i\}, i = 1, \ldots, k$, et $\{p_1, \cdots, p_k\} = S_n(T)$. Tout ouvert dans $\mathcal{S}_n(T)$ est une union finie d'ouverts de base $\{[\theta_i], i = 1, \ldots, k\}$.

Pour $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$, on pose

$$\psi_J = \bigvee_{i \in J} \theta_i$$

Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule, on considère $[\phi(\bar{x})]$ dans $\mathcal{S}_n(T)$: il existe $J^{'} \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$[\phi(\bar{x})] = \bigcup \{p_j : j \in J^{'}\} = \bigcup_{j \in J'} [\theta_j] = [\bigvee_{j \in J'} \theta_j(\bar{x})] = [\psi_{J'}(\bar{x})]$$

On a alors : $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_{J'}(\bar{x}))$; car sinon il existerait $\mathcal{A}$ satisfaisant T et $\bar{a} \subseteq A$ tels que $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})\ \&\ \neg\psi_{J'}(\bar{a})$ (ou $\mathcal{A} \models \neg\phi(\bar{a})\ \&\ \psi_{J'}(\bar{a})$). Alors, en posant $q = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$, on aurait $q \in [\phi] \setminus [\psi_{J'}]$ (ou $q \in [\psi_{J'}] \setminus [\phi]$).

(iii) $\rightarrow$ (i)
(Notons que le cas $n = 0$ implique que T est complète). Grâce au lemme 1.10, il suffit de montrer que si T satisfait (iii) et si $\mathcal{M} \models T$, alors $\mathcal{M}$ est atomique. (En effet si deux modèles de T sont atomiques, ils réalisent les mêmes types (voir remarque précédant le Lemme) et donc s'ils sont tous les deux infinis dénombrables, ils sont isomorphes par le Lemme 1.10.)

Soit $\bar{a} \in M^n$. Par hypothèse, il existe $\psi_1, \cdots, \psi_m$ telles que toute formule $\phi(\bar{x})$ soit équivalente dans les modèles de T à l'une d'entre elles. Soit $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ ssi $j \in J$.

Affirmation : $\{tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})\} = [\bigwedge_{j\in J}\psi_j]$ (*) ce qui signifie que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé.
Montrons (*) :
$\subseteq$: $\mathcal{M} \models \bigwedge_{j\in J}\psi_j(\bar{a})$, donc $\bigwedge_{j\in J}\psi_j \in \{\phi(\bar{v}) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\} = tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$, ie $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in [\bigwedge_{j\in J}\psi_j]$.
$\supseteq$: Montrons que l'intersection est un singleton. Soit $p \neq tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ tel que $p \in \bigcap_{j\in J}[\psi_j]$. Il existe donc ϕ telle que $\phi \in p$ & $\phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$. Or $\phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \leftrightarrow \neg\phi(\bar{a})$. Par hypothèse, $T \models \neg\phi \leftrightarrow \psi_j$ pour un certain j. Mais alors $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ et donc $j \in J$; or $p \in [\psi_j]$: contradiction. $\square$

1.6 Amalgamation

Définition 1.12 Une théorie T a la propriètè *d'amalgamation* si pour tous modèles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de T tels que il y a des *plongements* $e : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, alors il y a un modèle $\mathcal{D}$ de T et des *plongements* $g : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $h : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $g \circ e = h \circ f$.

Théorème 1.13 *Une théorie T a l'élimination des quantificateurs ssi T est modèle-complète et $T_\forall$ a la propriètè d'amalgamation.*

Preuve : Voir [2] Theorem 8.4.1, page 382.

Chapitre 2

Modèles saturés et automorphismes

Définition 2.1 Soit κ un cardinal infini. Une -structure $\mathcal{M}$ est κ-saturée si pour tout $A \subset M$ de cardinalité *strictement* plus petite que κ, tout élément p de $S_1^{\mathcal{M}}(A)$ est réalisé dans $\mathcal{M}$ c.a.d. qu'il existe un élément $c \in M$ tel que pour toute $\mathcal{L}_A$-formule $\phi(x) \in p$, $\mathcal{M} \models \phi(c)$.

Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est saturée si elle est $|M|$-saturée.

Notation 2.2 Diagramme (élémentaire) d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_a : \ a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante n'apparaissant pas dans $\mathcal{L}$.

On note $Diag(\mathcal{A})$ le diagramme (sans quantificateurs) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_A$ c.a.d. l'ensemble de tous les $\mathcal{L}_A$-énoncés *sans quantificateurs* vrais dans $\mathcal{A}$.

On note $Diag_{el}(\mathcal{A})$ le diagramme élémentaire de $\mathcal{A}$ c.a.d. l'ensemble de tous les $\mathcal{L}_A$-énoncés vrais dans $\mathcal{A}$.

Définition 2.3 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dira que f est une application *élémentaire* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, pour tout $\bar{a} \subset A$, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{A} \models \phi(\bar{a}) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi(f(\bar{a})).$$

On dira que f est *partielle élémentaire* de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ si $dom(f) \subset A$.

Théorème 2.4 *(Amalgamation élémentaire) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux $\mathcal{L}$-structures et supposons qu'il y ait un plongement f de la $\mathcal{L}$-sous-structure $< \bar{a} >_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ engendrée par $\bar{a}$ dans $\mathcal{C}$, où $\bar{a}$ est un uple éventuellement infini. Supposons en outre que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$.*

Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ et un plongement élémentaire $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $g \circ f(\bar{a}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \overset{\preceq}{\to} & \mathcal{D} \\ \uparrow\subseteq & & \uparrow g \\ < \bar{a} >_{\mathcal{B}} & \overset{f}{\to} & \mathcal{C} \end{array}$$

Preuve : On montre que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$ est une théorie consistente, en supposant que $B \cap C =< \bar{a} >$ et en identifiant $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$. Sinon en utilisant le théorème de compacité, cela impliquerait qu'il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et un uple $\bar{d} \subset C- < \bar{a} >$ tel que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models$

$\neg\phi(\bar{a},\bar{d})$. Donc, $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a},\bar{x})$. Ce qui est équivalent à $(\mathcal{B},\bar{a}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a},\bar{x})$. Par hypothèse cela implique que $(\mathcal{C},\bar{a}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a},\bar{x})$, une contradiction.

Soit $\mathcal{D}$ un modèle de $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$. Donc, le réduit de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{L}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{B}$. On définit pour tout $d \in C- < \bar{a} >$, $g(d) = d^{\mathcal{D}}$ et $g(a) = a$. Ce plongement est élémentaire. $\square$

Lemme 2.5 *Toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ a une extension élémentaire où tous les $\mathcal{L}_A$-types consistants avec $Th(\mathcal{A})$ sont réalisés.*

Preuve : On utilise le théorème de compacité et le théorème d'amalgamation élémentaire ci-dessus. $\square$

Proposition 2.6 *Soit κ un cardinal infini et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{A}$ est κ-saturée.*

(2) *Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour tout sous-ensemble B de A de cardinalité $< \kappa$, pour tout $p \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{A}}(B)$ est réalisé dans $\mathcal{A}$.*

Exercice : Décrire les 1-types dans ACF_0. Montrer que $(\mathbb{C}, +, -, ., 0, 1)$ est saturée.

Exercice : Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur ω. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie. Alors l'ultrapuissance de $\mathcal{A}$: $\prod_{\mathcal{U}}^{\omega} \mathcal{A}$ est $\aleph_1$-saturée. (Une aide se trouve dans [7] 4.5.37).

Définition 2.7 Soit κ un cardinal infini. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ est κ-homogène si pour tout sous-ensemble B de A, $|B| < \kappa$, toute application partielle élémentaire f de B dans $\mathcal{A}$ et tout élément $a \in A \setminus B$, il existe une application partielle élémentaire f^* qui étend f sur $B \cup \{a\}$. Une $\mathcal{L}$-structure est homogène si elle est $|A|$-homogène si

Proposition 2.8 *Toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ qui est κ-saturée est κ-homogène.*

Proposition 2.9 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie complète et $\mathcal{A}$ un modèle infini dénombrable de T. Alors $\mathcal{A}$ est saturée si et seulement si $\mathcal{A}$ est homogène et satisfait tous les éléments de $\mathcal{S}(T)$.*

De la preuve, on tire le corollaire suivant :

Corollaire 2.10 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie complète et $\mathcal{A}$ un modèle infini dénombrable de T. Alors $\mathcal{A}$ est $\aleph_0$-saturée si et seulement si $\mathcal{A}$ est $\aleph_0$-homogène et satisfait tous les éléments de $\mathcal{S}(T)$.*

Exercice : Montrer que $(\mathbb{R}, <)$ est $\aleph_0$-homogène et qu'elle n'est pas $\aleph_1$-saturée.

Exemple : Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ le langage des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Soit T la théorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Montrer que T a l'e.q. dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$, que T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, mais que T est $\aleph_1$-catégorique.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, disons k. Alors V est homogène mais il existe $p \in S_{k+1}(T)$ qui n'est pas réalisé dans V.

Exemple d'une théorie T complète qui a un modèle dénombrable qui réalise tous éléments de $\mathcal{S}(T)$ et qui n'est pas homogène.

Théorème 2.11 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie complète. Alors T a un modèle saturé dénombrable si et seulement si $|\mathcal{S}(T)| \leq \aleph_0$.*

On utilise le Lemme suivant :

Lemme 2.12 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ de même cardinal qui est $\aleph_0$-homogène.*

Notation 2.13 Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. On notera $Aut_B(\mathcal{A})$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{A}$ qui sont l'identité sur B.

Proposition 2.14 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure homogène et B un sous-ensemble de A, avec $|B| < |A|$. Soit f une application partielle élémentaire de B dans $\mathcal{A}$. Alors, il existe un automorphisme de $\mathcal{A}$ qui étend f. En particulier, si $\mathcal{A}$ est homogène et $\bar{a}$, $\bar{b} \in A^n$ et $tp_B(\bar{a}) = tp_B(\bar{b})$, alors il existe $\sigma \in Aut_B(\mathcal{A})$ tel que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Théorème 2.15 *Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable et soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux modèles dénombrables homogènes de T qui réalisent les mêmes types de $\mathcal{S}(T)$. Alors $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Proposition 2.16 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure saturée et $B \subset A$ avec $|B| < |A|$. Soit $X \subset A^n$ définissable avec paramètres dans $\mathcal{A}$. Alors X est définissable à paramètres dans B (ou B-définissable) si et seulement si X est $Aut_B(\mathcal{A})$-invariant (c.a.d. pour tout $\sigma \in Aut_B(\mathcal{A})$, $\sigma(X) = X$).*

Définition 2.17 Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et soit $B \subset A$. Un élément $a \in A$ est algébrique sur B ou encore $a \in acl(B)$, s'il existe une $\mathcal{L}_B$-formule $\phi(x)$ telle que $\mathcal{A} \models \phi(a)$ et $\{x \in A : \mathcal{A} \models \phi(x)\}$ est fini. Un élément $a \in A$ est définissable sur B ou encore $a \in dcl(B)$, s'il existe une $\mathcal{L}_B$-formule $\phi(x)$ telle que $\mathcal{A} \models \phi(a)$ et $\mathcal{A} \models \forall x\ (\phi(x) \rightarrow x = a)\}$.

Corollaire 2.18 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure saturée et $B \subset A$ avec $|B| < |A|$. Soit $a \in A$, alors $a \in dcl(B)$ si et seulement si a est fixé par $Aut_B(\mathcal{A})$.*

Proposition 2.19 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure saturée, $B \subset A$ avec $|B| < |A|$ et $a \in A$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$a \in acl(B)$*
2. *a a un nombre fini d'images par $Aut_B(\mathcal{A})$ (ou encore l'orbite de a par $Aut_B(\mathcal{A})$ est finie).*
3. *Le type $tp_B^{\mathcal{A}}(a)$ a un nombre fini de réalisations dans $\mathcal{A}$.*

Théorème 2.20 *Toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ a une extension élémentaire $\mathcal{B}$ qui est $|\kappa|^+$-saturée avec $|B| \leq |A|^\kappa$. Si $|S_1^{\mathcal{A}}(A)| = |A|$, alors il existe $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ avec $|A| = |\mathcal{B}|$.*

Corollaire 2.21 *Sous l'hypothèse du continu généralisée (i.e. $2^\kappa = \kappa^+$). Toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ de cardinalité κ a une extension élémentaire saturée (de cardinalité κ^+).*

Définition 2.22 $\mathcal{M}$ est κ-universel si pour tout $\mathcal{N} \models T$, $|N| < \kappa$, il existe un plongement élémentaire de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ est universel si $\mathcal{M}$ est $|M|^+$-universel.

Lemme 2.23 *Soit* $\kappa \geq \aleph_0$. *Si* $\mathcal{M}$ *est* κ*-saturée, alors* $\mathcal{M}$ *est* κ^+*-universel.*

Proposition 2.24 *Soit* $\mathcal{L}$ *un langage contenant une constante et soit* T *une* $\mathcal{L}$*-théorie. Alors* T *a l'e.q. si pour tout modèle* $\mathcal{M}$ *de* T, *tout* $a \subset M$ *et tout modèle* $\mathcal{N}$ $|M|^+$*-saturé et toute application partielle élémentaire* f *de* A *dans* $\mathcal{N}$, *on peut prolonger* f *en un plongement élémentaire de* $\mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{N}$.

Théorème 2.25 *Soit* $\kappa \geq \aleph_0$ *et soit* $\mathcal{M}$ *une* $\mathcal{L}$*-structure. Alors* $\mathcal{M}$ *est* κ*-saturée si et seulement si* $\mathcal{M}$ *est* κ*-homogène et* κ^+*-universelle.*

Théorème 2.26 *Soient* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ *deux* $\mathcal{L}$*-structures saturées de même cardinalité. Alors* $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Chapitre 3

Théories ω-stables et formules (fortement) minimales

Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie complète avec des modèles infinis. Soit κ un cardinal infini.

Définition 3.1 Une $\mathcal{L}$-théorie complète T est κ-stable si pour tout $n \in \omega$, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T et tout sous-ensemble A de cardinalité κ, on a $|S_n(A)| \leq \kappa$.

Proposition 3.2 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète et soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. Supposons que pour tout sous-ensemble A de $\mathcal{M}$ de cardinalité κ, on a $|S_1(A)| \leq \kappa$, alors pour tout $n \in \omega$ et pour tout sous-ensemble A de $\mathcal{M}$ de cardinalité κ, on a $|S_n(A)| \leq \kappa$.*

Proposition 3.3 *Soit κ un cardinal régulier. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, κ-stable, alors T a un modèle saturé de cardinalité κ.*

Proposition 3.4 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, ω-stable. Alors T est κ-stable*

Définition 3.5 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule à paramètres dans M. On dit que $\phi(\bar{x})$ est minimale (dans $\mathcal{M}$) si $\phi(\mathcal{M})$ est infini et pour tout sous-ensemble définissable X de $\mathcal{M}$ (avec paramètres dans M), l'intersection $X \cap \phi(M)$ est soit finie soit cofinie. On dit que $\phi(\bar{x})$ est fortement minimale si pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, $\phi(N)$ est minimale.

Proposition 3.6 *Soit T une théorie ω-stable et soit $\mathcal{M} \models T$. Alors $\mathcal{M}$ a une formule minimale.*

Exemples : ACF_0 est ω-stable.
Ni RCF, ni DLO ne sont ω-stables.

Exercice : Montrer que $Th(\mathbb{Z}, +, 0)$ n'est pas ω-stable. Montrer que cette théorie a l'e.q. dans le langage $\{+, -, 0, 1, \equiv_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice : Soit $\mathcal{L} := \{E\}$, où E est une relation binaire et soit T la théorie d'une relation d'équivalence qui pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, a une seule classe d'équivalence de cardinalité n. Montrer que T a l'e.q. dans le langage $\{E, c_{nm}; n \geq m, n, m \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que T est complète et ω-stable. Dans un modèle de T trouver une formule minimale qui ne le reste pas dans une extension élémentaire.

Proposition 3.7 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, où $\mathcal{L}$ est un langage dénombrable. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et A un sous-ensemble de M. Si pour tout $A_0 \subset A$, $|A_0| \leq \aleph_0$, on a $|\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A_0)| \leq \aleph_0$, alors les types isolés dans $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$ sont denses.*

De plus pour tout A_0 dénombrables inclus à M, si $|\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A_0)| > \aleph_0$, alors $|\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A_0)| = 2^{\aleph_0}$.

Définition 3.8 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subset M$ et $b \in M$. On dit que :

1. b est définissable au-dessus de A s'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{a} \subset A$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$ et $\mathcal{M} \models \forall y\ (\phi(y, \bar{a}) \to y = b)$. On notera $b \in dcl(A)$.
2. b est algébrique sur A s'il existe une -formule $\phi(x, \bar{y})$, $n \in \omega^*$ et $\bar{a} \subset A$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$ et $\mathcal{M} \models \exists z_1 \cdots \exists z_n\ \forall y\ (\phi(y, \bar{a}) \to (\bigvee_{i=1}^{n}\ y = z_i))$. On notera $b \in acl(A)$.

Exercice : On a $acl(acl(A)) = acl(A)$, $A \subset acl(A)$, $A \subset B \to acl(A) \subset acl(B)$, si $a \in acl(A)$, alors il existe un sous-ensemble fini $A_0 \subset A$ tel que $a \in acl(A_0)$, $dcl(dcl(A)) = dcl(A)$.

Proposition 3.9 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, soit $\phi(x)$ une $\mathcal{L}_M$-formule. Supposons que $\phi(x)$ soit minimale dans $\mathcal{M}$. Posons $D := \phi(M)$. Soit $A \subset D$, $a, b \in D$, alors la relation acl satisfait au lemme de l'échange c.a.d.*

$$\mathrm{si}\ \ \mathrm{a} \in \mathrm{acl}(\mathrm{A} \cup \{\mathrm{b}\}) - \mathrm{acl}(\mathrm{A}), \mathrm{alors}\ \ \mathrm{b} \in \mathrm{acl}(\mathrm{A} \cup \{\mathrm{a}\}).$$

Si la relation *acl* satisfait au lemme de l'échange, toutes les *bases* ont la même cardinalité et donc la *dimension* d'un sous-ensemble minimal est bien définie (voir [4], section 3.6, page 122).

Définition 3.10 On dit que qu'une -théorie T consistante et complète est fortement minimale si la formule $x = x$ est une formule fortement minimale.

Définition 3.11 Modèles premiers d'une théorie complète T au-dessus d'un sous-ensemble A.

Soit $A \subset \mathcal{M}$, où $\mathcal{M} \models T$. On dit que $\mathcal{M}_0$ est un modèle *premier au-dessus de A* si pour tout modèle $\mathcal{N}$ de T et toute application partielle élémentaire $f : A \to \mathcal{N}$ se prolonge en une application partielle élémentaire de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{N}$.

(Remarque : si T est modèle-complète et s'il existe un modèle $\mathcal{M}_0$ de T qui se plonge dans tout modèle $\mathcal{N}$ de T, alors $\mathcal{M}_0$ est premier pour T au-dessus de $\emptyset$.)

Lemme 3.12 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et soient $A \subset B \subset M$. Supposons que tout uple d'éléments de B satisfait un type isolé sur A et soit $\bar{m}$ un uple déléments de M. Alors, si $tp_B^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ est isolé, on a que $tp_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ est isolé.*

Proposition 3.13 *Soit T une théorie ω-stable, $\mathcal{M} \models T$ et $A \subset M$. Alors, il existe $A \subset \mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}_0$ est premier au-dessus de A. De plus tout uple d'éléments de M réalise un type isolé sur A.*

Définition 3.14 Soit $\mathcal{M}$ une -structure et $(I, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soient $A := (a_i; i \in I)$ un sous-ensemble d'éléments de M indicés par I. On dit que A est un ensemble d'*indiscernables* (dans l'ordre) si pour toute -formule $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ et tout n-uple d'éléments de I, $(i_1, \cdots, i_n)$, $(j_1, \cdots, j_n)$ avec $i_1 < \cdots < i_n$, $j_1 < \cdots < j_n$, on a $\mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi(a_{j_1}, \cdots, a_{j_n})$.

On dit que A est un ensemble total d'*indiscernables* si pour toute -formule $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ et tout n-uple d'éléments de I, $(i_1, \cdots, i_n)$, $(j_1, \cdots, j_n)$, on a $\mathcal{M} \models \phi(a_{i_1}, \cdots, a_{i_n})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi(a_{j_1}, \cdots, a_{j_n})$.

Lemme 3.15 *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \models T$ contenant un sous-ensemble A et soit $\phi(x)$ une ${}_A$-formule fortement minimale. Soient $a_1, \cdots, a_n \in \phi(M)$ et $b_1, \cdots, b_n \in \phi(N)$. Alors $tp_A^{\mathcal{M}}(a_1, \cdots, a_n) = tp_A^{\mathcal{N}}(b_1, \cdots, b_n)$.*

Corollaire 3.16 *Sous les hypothèses du lemme, tout ensemble fortement minimal est un ensemble d'indiscernables.*

Notation 3.17 Soit T une -théorie consistante et complète et κ un cardinal infini. On note $I(T, \kappa)$ le nombre de modèles de T de cardinalité κ deux à deux non isomorphes.

Théorème 3.18 *Soit un langage dénombrable et soit T une -théorie consistante et complète, fortement minimale. Alors T est κ-catégorique, pour $\kappa > \aleph_0$ et $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$.*

Lemme 3.19 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et complète fortement minimale. Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles de T. Alors, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ ssi $dim(M) = dim(N)$.*

Chapitre 4

Paires de Vaught

Définition 4.1 Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles de T. On dit que $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est une paire de Vaught si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, $M \neq N$, et il existe une formule $\phi(x)$ à paramètres dans M telle que $\phi(M) = \phi(N)$ et $\phi(M)$ est infini.

Théorème 4.2 *(Morley, Baldwin-Lachlan) Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable. T une $\mathcal{L}$-théorie complète avec des modèles infinis et soit κ un cardinal infini non dénombrable. Alors, T est κ-catégorique ssi T est ω-stable et n'a pas de paires de Vaught ssi T est $\aleph_1$-catégorique.*

Définition 4.3 T élimine le quantificateur $\exists^\infty$ si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$, il existe $n_\phi \in \mathcal{N}$ tel que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T et tout uple $\bar{a} \subset M$, $\phi(M, \bar{a})$ est infini, ou bien $|\phi(M, \bar{a})| \leq n_\phi$.

Lemme 4.4 *Si T n'a pas de paire de Vaught, alors T élimine le quantificateur $\exists^\infty$.*

Corollaire 4.5 *Si T élimine $\exists^\infty$, alors toute formule minimale dans un modèle de T, est fortement minimale.*

Théorème 4.6 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, où $\mathcal{L}$ est dénombrable, avec des modèles infinis. Soit $\kappa \geq \aleph_1$. Si T est ω-stable et n'a pas de paires de Vaught, alors T est κ-catégorique.*

Pour la réciproque, on montre tout d'abord que si T est κ-catégorique , $\kappa \geq \aleph_1$ et ω-stable, alors T n'a pas de paire de Vaught. Dans le chapitre suivant on montrera que si T est κ-catégorique, $\kappa \geq \aleph_1$, alors T est ω-stable.

Lemme 4.7 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et complète. Si T a une paire de Vaught, alors T a une paire de Vaught dénombrable.*

Lemme 4.8 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et complète. Si T a une paire de Vaught, alors T a un modèle $\mathcal{M}$ de cardinalité $\aleph_1$, qui contient un ensemble infini définissable dénombrable. On dira qu'un tel modèle est un $(\aleph_1, \aleph_0)$-modèle.*

Lemme 4.9 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante, complète et T est ω-stable. Soit $\mathcal{M} \models T$, avec $|M| \geq \aleph_1$. Alors il existe une extension élémentaire propre $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tel que tout type dénombrable à paramètres dans M, qui est réalisé dans $\mathcal{N}$, l'est déjà dans $\mathcal{M}$.*

Lemme 4.10 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et complète. Si T est ω-stable et a un $(\aleph_1, \aleph_0)$-modèle. Alors T a un $(\kappa, \aleph_0)$-modèle pour tout cardinal κ infini non dénombrable.*

De ces quatre lemmes on en déduit le résultat annoncé.

Théorème 4.11 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et complète. Si T est κ-catégorique , $\kappa \geq \aleph_1$ et si T est ω-stable, alors T n'a pas de paire de Vaught.*

Chapitre 5

Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski

Définition 5.1 Soit $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné. Le E-M-type d'une suite $\mathcal{I} := (\bar{a}_i)_{i \in I}$ de k-uples distincts d'éléments de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un sous-ensemble $A \subset M$, est l'ensemble des $_A$-formules $\phi(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ telles que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_{i_1}, \cdots, \bar{a}_{i_n})$ pour tout $i_1 < \cdots < i_n$.

La suite $\mathcal{I}$ est indiscernable (pour l'ordre) si son E-M-type est complet.

Proposition 5.2 *Soit T une -théorie avec un modèle infini. Alors pour tout sous-ensemble ordonné infini I, T a un modèle infini avec une suite d'indiscernables indicées par I.*

Cette proposition utilise un résultat combinatoire : le théorème de Ramsey.

Théorème 5.3 *Soit A un ensemble infini. Notons $[A]^n$, $n \geq 1$, l'ensemble des sous-ensembles de A à n éléments et soit $c : [A]^n \to \{1, \cdots, k\}$. Alors il existe $B \subset A$, B infini tel que $c([B]^n)$ est un singleton.*

Plus généralement on montre :

Lemme 5.4 *Soient $(I, \leq)$, $(J, \leq)$ deux ensembles ordonnés infinis. Soit $\mathcal{M}$ une -structure et $(a_i)_{i \in I}$ une suite d'éléments de M. Alors il existe $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ telle que $\mathcal{N}$ a une suite d'éléments $(b_j)_{j \in J}$ qui a le même E.M.-type que $(a_i)_{i \in I}$ et qui est une suite d'indiscernables (pour l'ordre).*

Lemme 5.5 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure engendreée par un ensemble bien ordonné d'indiscernables. Alors $\mathcal{M}$ réalise au plus un nombre dénombrable de 1-types sur n'importe quel sous-ensemble dénombrable de M.*

Définition 5.6 *Skolémisation et fonctions de Skolem définissables.*

T a des fonctions de Skolem si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe un -terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

Une skolémisation de T est une théorie T^+ dans un langage $^+$ étendant tel que tout modéle de T peut etre étendu en un modèle de T^+ et pour toute $^+$-formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe un $^+$-terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T^+ \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

T a des fonctions de Skolem définissables si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe une -formule $\psi(\bar{x}, y)$ tel que
$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y\ (\psi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, y))$, et
$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \exists_{=1} y \psi(\bar{x}, y))$.
On peut définir alors une fonction F de la façon suivante :
$\forall \bar{x} \forall y (F(\bar{x}) = y \leftrightarrow (\exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge \psi(\bar{x}, y)) \vee (\neg \exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge y = x_1)))$.

En utilisant la Skolémisation d'une théorie T, ce Lemme permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 5.7 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie avec un modèle infini et soit $\kappa \geq \aleph_0$. Alors T a un modèle de cardinalité κ qui ne réalise qu'un nombre dénombrable de* 1*-types sur n'importe quel sous-ensemble dénombrable de paramètres.*

Corollaire 5.8 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une théorie κ-catégorique pour $\kappa > \aleph_0$, qui a un modèle infini. Alors T est ω-stable.*

Chapitre 6

Elimination des imaginaires

Définition 6.1 Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ a l'élimination des imaginaires (e..i.) si pour toute *relation d'équivalence définissable* $\theta(\bar{x}, \bar{y})$, où $\theta((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n))$ est une $\mathcal{L}$-formule, et tout n-uple $\bar{a} \subset M$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\phi(\bar{x}, \bar{z})$ et un unique $\bar{b} \subset A$ tel que la classe d'équivalence contenant $\bar{a}$ est de la forme $\phi(A^n, \bar{b})$ (éventuellement $\bar{z}$ et $\bar{b}$ peuvent être vides).

Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ a l'élimination des imaginaires uniforme si cette formule $\phi(\bar{x}, \bar{z})$ ne dépend que de $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ (et non de $\bar{a}$).

Supposons que $\mathcal{M}$ ait l'e.i. uniforme alors on a une fonction $\mathcal{L}$-définissable F qui *choisit* un élément dans chaque classe déquivalence de $\theta(\cdot, \cdot)$:

$$F(\bar{y}) = \bar{z} \text{ ssi } \forall \bar{\mathrm{x}} \, (\theta(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) \leftrightarrow \phi(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{z}})).$$

Définition 6.2 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et soit $\mathcal{M}$ un modèle saturé de T et soit X un sous-ensemble $\mathcal{L}_M$-définissable de M^n. Alors on dit que $\bar{b}$ est une base canonique pour X si pour tout automorphisme σ de $\mathcal{M}$, on a que $\sigma(X) = X$ et seulement si $\sigma(\bar{b}) = \bar{b}$.

Proposition 6.3 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Sont équivalents :*

1. *$\mathcal{M}$ a l'e.i. uniforme,*
2. *pour toute $\mathcal{L}$-formule $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, avec $\bar{x} := (x_1, \cdots, x_n)$ i.e. $|\bar{x}| = n$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\chi(\bar{x}, \bar{z})$ telle que pour tout $\bar{a}$, il existe un et un seul uple $\bar{b}$ tel que $\psi(M^n, \bar{a}) = \chi(M^n, \bar{b})$.*

On dit que $\mathcal{M}$ a la 1-e.i. uniforme si le point (2) ci-dessus est vrai pour toutes les $\mathcal{L}$-formules $\psi(x, \bar{y})$ (où $|x| = 1$.

Définition 6.4 Une $\mathcal{L}$-théorie T consistante a l'e.i. (uniforme) si tous les modèles $\mathcal{M}$ de T ont l'e.i. (uniforme).

Remarque 6.5 Si $\mathcal{M}$ a l'e.i. uniforme, alors tout ensemble définissable de $\mathcal{M}$ (avec paramètres et inclus dans une puissance cartésienne de M) a une base canonique.

Proposition 6.6 *Supposons $\mathcal{L}$ contienne au moins deux constantes et que dans tout modèle $\mathcal{M}$ de T, tout sous-ensemble définissable de $\mathcal{M}$ (avec paramètres et inclus dans une puissance cartésienne de M) ait une base canonique. Alors T a l'e.i. uniforme.*

Nous allons montrer que la théorie ACF des corps algébriquements clos a l'e.i. uniforme ainsi que la théorie RCF des corps-réels.

Tout d'abord dans un corps on peut toujours coder les ensembles finis.

Lemme 6.7 *Soit F un corps commutatif et soient $\bar{b}_1, \cdots, b_m \in F^n$. Alors il existe ℓ et $\bar{c} \in F^\ell$ tel que pour tout automorphisme $\sigma \in Aut(F)$, on a $\sigma(\bar{c}) = \bar{c}$ si et seulement si σ laisse l'ensemble fini $\{\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_m\}$ invariant.*

Notation 6.8 On note les automorphismes de $\mathcal{M}$ qui laissent l'ensemble X invariant par $Aut_{(X)}(\mathcal{M})$ et ceux qui laissent X fixe point par point par $Aut_X(\mathcal{M})$.

Lemme 6.9 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et supposons que M soit minimal et $acl^{\mathcal{M}}(\emptyset)$ infini. Soit $X \subset M^n$, un sous ensemble définissable de $\mathcal{M}$. Alors il existe un ensemble fini C de uples de M tels que $Aut_{(X)}(\mathcal{M}) = Aut_{(C)}(\mathcal{M})$.*

Preuve : Soit $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ une $\mathcal{L}$-formule telle que $X = \phi(M, \bar{a})$. On considère la relation d'équivalence E définie par $E(\bar{a}, \bar{b})$ ssi $\forall \bar{x}\ \phi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{b})$. Notons $\bar{a}_E$ la classe d'équivalence de E qui contient $\bar{a}$. Montrons qu'il existe $\bar{b} \in \bar{a}_E$ tel que pour tout $\sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})$, $\sigma(\bar{b}) \in acl(\bar{a})$ et $|\{\sigma(\bar{b}) :\ \sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})\}|$ est fini. Ce sera l'ensemble C cherché.

Dans la classe de $\bar{a}_E$, on considère les uples $\bar{b}$ tels que $|\{1 \leq i \leq m :\ |\{\sigma(b_i) : \sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})\}|$ est fini et pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_{(X)}(\mathcal{M})$, $\sigma(\mathrm{b_i}) \in \mathrm{acl}(\bar{\mathrm{a}})\}|$ est maximal. Supposons que ce nombre est strictement plus petit que m. Soit $\bar{b} \in \bar{a}_E$ un tel uple. On réordonne ce uple tel que pour $1 \leq i \leq j$ on ait
$|\{\sigma(b_i) :\ \sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})\}|$ est fini et pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_{(X)}(\mathcal{M})$, $\sigma(\mathrm{b_i}) \in \mathrm{acl}(\bar{\mathrm{a}})$. Posons $\bar{b}_j := (b_1, \cdots, b_j)$.

Soit $Y := \{y \in M :\ \exists y_{j+2} \cdots \exists y_m \ \bigwedge_{\sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})} \forall \bar{x}\ \phi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \sigma(\bar{b}_j), y, y_{j+2} \cdots, y_m)\}$. Notons que Y est définissable par choix de $\bar{b}_j$ et que pour tout $\sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})$, $\sigma(Y) = Y$.

Si Y est fini, comme $b_{j+1} \in Y$ et pour tout $\sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})$, $\sigma(b_{j+1}) \in Y$, on contredit la maximalité de j.

Si Y est infini, comme M est minimal, Y est cofini. Et donc comme $acl(\emptyset)$ est infini, il existe $m \in acl(\emptyset) \cap Y$. Soit $\psi(z)$ une $\mathcal{L}$-formule telle que $\mathcal{M} \models \psi(m)$ et $\psi(M)$ fini. Comme pour tout $\sigma \in Aut_{(X)}(\mathcal{M})$, $\psi(\sigma(m))$ et $\sigma(m) \in Y$, on peut prolonger $\bar{b}_j$ par m, ce qui contredit la maximalité de j. $\square$

Corollaire 6.10 *La théorie ACF a l'e.i. uniforme.*

Une autre preuve de ce résultat utilise l'e.q., que les idéaux de polynômes sont noethériens, et ont un plus petit corps de définition ([6]).

Lemme 6.11 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Si $\mathcal{M}$ a la 1-e.i. uniforme et si $\mathcal{M}$ a des fonctions de Skolem définissables. Alors $\mathcal{M}$ a l'e.i. uniforme.*

Proposition 6.12 *La théorie RCF a la 1-e.i. uniforme et a des fonctions de Skolem définissables. Plus généralement si T est une $\mathcal{L}$-théorie o-minimale étendant celle des groupes totalement ordonnés, où $\mathcal{L}$ contient $\{<, +, -, 0, 1\}$ et $1 > 0$, alors T a la 1 e.i. uniforme et a des fonctions de Skolem définissables.*

Corollaire 6.13 *La théorie RCF a l'e.i. uniforme.*

Définition 6.14 Etant donné un langage $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ on associe un langage $\mathcal{L}^{eq}$ contenant $\mathcal{L}$ et une structure $\mathcal{M}^{eq}$ de la façon suivante. A chaque relation E d'équivalence $\mathcal{L}$-définissable sans paramètres, on associe un prédicat M_E qui sera interprété dans $\mathcal{M}^{eq}$ par l'ensemble des classes déquivalence de E, et une fonction f_E qui sera interprétée dans $\mathcal{M}^{eq}$ par la fonction qui envoie un uple de M vers la classe d'équivalence de E qui le contient.

Le domaine de $\mathcal{M}^{eq}$ consiste en l'union disjointe des M_E, où E parcourt l'ensemble des relations d'équivalence $\mathcal{L}$-définissable sans paramètres, et on identifie M avec $M_=$ et l'interprétation de $\mathcal{L}$ dans $M_=$ est celle de $\mathcal{M}$.

On note T^{eq} la théorie de la classe des $\mathcal{L}^{eq}$-structures $\mathcal{M}^{eq}$, où $\mathcal{M} \models T$.

Lemme 6.15 *Soit F une relation d'équivalence définissable sans paramètres dans T^{eq} sur $(M_{E_1} \cup M_{E_2} \cup \cdots \cup M_{E_m})^n$. Alors il existe une fonction définissable sans paramètres f_F de $(M_{E_1} \cup M_{E_2} \cup \cdots \cup M_{E_m})^n$ dans $\mathcal{M}^{eq}$ telle que deux uples ont la même image par f_F sis ils sont dans la même classe modulo F.*

La preuve utilise le fait que deux uples issus de $M_=$ ont même $\mathcal{L}$-type dans $\mathcal{M}$ ssi ils ont même $\mathcal{L}^{eq}$-type dans $\mathcal{M}^{eq}$.

Chapitre 7

Rang de Morley

Etant donné $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée, et $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}_M$-formule, on définit le rang de Morley de $\phi(\bar{x})$ dans $\mathcal{M}$ de la façon suivante. C'est une fonction de l'ensemble des $\mathcal{L}_M$-formules dans la classe On des ordinaux à laquelle on ajoute deux symboles $\pm\infty$. On commence par définir $RM(\phi) \geq \alpha$, $\alpha \in On$.

Si $\phi(M)$ est vide, on dira que $RM(\phi) = -\infty$.

Sinon on pose $RM(\phi) \geq 0$.

Si α est un ordinal limite on pose $RM(\phi) \geq \alpha$ si pour tout $\gamma < \alpha$, on a $RM(\phi) > \gamma$.

Si α est un ordinal successeur, disons égal à $\beta+1$, on dira que $RM(\phi) \geq \beta+1$ si on peut trouver des $\mathcal{L}_M$-formules $\psi_n(\bar{x})$ deux à deux disjointes, incluses à ϕ et telle que $RM(\psi) \geq \beta$.

Si pour tout $\alpha \in On$, $RM(\phi) \geq \alpha$, on pose $RM(\phi) = +\infty$.

Dans la suite on suppose qu'on calcule le rang de Morley dans un modèle $\aleph_0$-saturé et ensuite on montrera que le rang ne dépend pas du modèle $\aleph_0$-saturé dans lequel on le calcule.

Lemme 7.1 *Si $RM(\phi) \in On$, alors il existe $\alpha \in On$ tel que $RM(\phi) = \alpha$.*

Exercices : Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée.

1. Si $\mathcal{M} \models \forall x\ (\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$, alors $RM^{\mathcal{M}}(\phi) \leq RM^{\mathcal{M}}(\psi)$.

2. Si $MR^{\mathcal{M}}(\phi) = \alpha \in On$, alors pour tout $\beta < \alpha$, $\beta \in On$, il existe ψ une $\mathcal{L}_M$-formule telle que $\mathcal{M} \models \forall x\ (\psi(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}))$ et $RM^{\mathcal{M}}(\psi) = \beta$.

Lemme 7.2 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée et soient ϕ, ψ deux $\mathcal{L}_M$-formules. Alors, $MR^{\mathcal{M}}(\phi \vee \psi) = max\{MR^{\mathcal{M}}(\phi),\ MR^{\mathcal{M}}(\psi)\}$.*

Définition 7.3 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée. Soit ϕ une $\mathcal{L}_M$-formule. On dit que ϕ est α-fortement minimale si $MR^{\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ et si pour toute $\mathcal{L}_M$-formule ψ telle que $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}\ (\psi(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}))$ on a soit $MR^{\mathcal{M}}(\psi) < \alpha$ ou $MR^{\mathcal{M}}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$.

On dit que $\phi \sim_\alpha \psi$ si $RM(\phi \triangle \psi) < \alpha$.

Proposition 7.4 *Toute $\mathcal{L}_M-$ formule ϕ de rang de Morley $\alpha \in On$ est équivalente à une disjonction finie de $\mathcal{L}_M$-formules $\phi_1, \cdots, \phi_d$ 2 à 2 disjointes α- fortement minimales. Ce d est unique et on l'appelle le degré de Morley de ϕ. Deux telles décompositions de ϕ sont uniques à $\sim_\alpha$ près.*

Définition 7.5 Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule, on pose $\phi^0 := \neg\phi$ et $\phi^1 := \phi$. On dit que $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la propriété de l'arbre binaire s'il existe un ensemble de paramètres $\{b_s : s \in 2^{<\omega}\}$ indicé par un arbre binaire tels que pour toute suite σ de ω dans $\{0, 1\}$, l'ensemble des formules $\{\phi^{\sigma(n)}(\bar{x}, \bar{b}_{\sigma\upharpoonright n}) : n \in \omega\}$ est consistent.

Corollaire 7.6 *Si ϕ a la propriété de l'arbre binaire, alors $RM(\phi)$ est infini.*

Définition 7.7 Soit $\mathcal{M} \models T$ et $A \subset M$. Soit $p \in S_n^T(A)$, on définit $RM(p)$ comme le minimum des rang de Morley des $_A$-formules qui appartiennent à p et le degré de p est le minimum des degrés des formules de même rang que p.

Lemme 7.8 *A chaque type appartenant à $S_n^T(A)$ de Rang de Morley dans On, on peut associer une $\mathcal{L}_M$-formule ϕ_p telle que si $p \neq q$, $T \models \neg(\phi_p \leftrightarrow \phi_q)$.*

Théorème 7.9 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistente et complète. Alors T est ω stable si chacune des $\mathcal{L}$-formules ϕ consistantes avec T a un rang de Morley ordinal.*

Lemme 7.10 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée. Soit $\theta(\bar{v}, \bar{w})$ une $\mathcal{L}$-formule et soient $\bar{a}, \bar{b}$ deux uples d'éléments de M de même longueur que $\bar{w}$. Supposons que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b})$, alors $RM^{\mathcal{M}}(\theta(\bar{v}, \bar{a}))$=$RM^{\mathcal{M}}(\theta(\bar{v}, \bar{b}))$.*

Lemme 7.11 *Soit $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures $\aleph_0$-saturées. Soit $\phi(\bar{v})$ une $\mathcal{L}_M$-formule. Alors $RM^{\mathcal{M}}(\phi) = RM^{\mathcal{N}}(\phi)$.*

Corollaire 7.12 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et soient $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ deux extensions élémentaires de $\mathcal{M}$, $\aleph_0$-saturées. Soit $\phi(\bar{v})$ une $\mathcal{L}_M$-formule. Alors $RM^{\mathcal{N}_1}(\phi) = RM^{\mathcal{N}_2}(\phi)$.*

Lemme 7.13 *Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}_A$-formule, $|\bar{x}| = n$. Alors il existe $p \in S_n(A)$ tel que $RM(p) = RM(\phi)$.*

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée et soit $\bar{a} \in M$ et $A \subset M$. On note $RM(\bar{a}/A) = RM(tp(\bar{a}/A))$.

Lemme 7.14 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée et soient $\bar{a}$, $b \in M$. Supposons que $b \in acl(A) \cup \{\bar{a}\}$, où $A \subset M$. Alors, $RM(\bar{a}b/A) = RM(\bar{a})$.*

Lemme 7.15 *Soit T une théorie ω-stable et soit $\mathcal{M} \models T$. Soit $X \subset M^n$ et soit $Y \subset M^m$. Soit $f : X \to Y$ une application définissable de X sur Y. Supposons que $|f^{-1}(\bar{y})|$ est fini, pour tout $\bar{y} \in Y$. Alors $RM(X) = RM(Y)$.*

Proposition 7.16 *Soit T une théorie ω-stable. Soient $A \subset B \subset M \models T$ et soit $p \in S_n(A)$. Alors il existe une extension $q \in S_n(B)$ de p de même rang de Morley. On dit que q est une extension non déviante de p. Le nombre de telles extensions à B est borné par $deg(p)$. Si $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-saturée, alors p a exactement $deg(p)$-extensions non-déviantes sur M. Enfin p a au plus une extension non déviante de même degré sur B.*

Définition 7.17 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, soit $A \subset \mathcal{M}$ un modèle de T $\aleph_1$ saturé. Soit $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ une $\mathcal{L}_A$-formule. On dit qu'elle a la propriété de l'ordre s'il existe $\bar{a}_i, \bar{b}_j,\ i, j \in I$, où $(I, <)$ est un ensemble infini totalement ordonné, tels que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ ssi $i < j$.

Dans [10], cette propriété est définie pour $(I, <) = (\omega, <)$, mais on peut montrer que ces deux définitions sont équivalentes utilisant le Lemme 5.4.

Proposition 7.18 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie totalement transcendante. Alors aucune formule n'a la propriété de l'ordre.*

Lemme 7.19 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée et soit $\phi(\bar{v})$ une $\mathcal{L}_M$-formule avec $RM(\phi) = \alpha$. Soit $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $\psi(\bar{v})$ une $\mathcal{L}_N$-formule telle que $RM(\phi \wedge \psi) = \alpha$. Alors il existe $\bar{a} \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi(\bar{a})$.*

Exercice : Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure κ-saturée. Soient $\{\phi_i(\bar{v}) : i \in I\}$, $\{\theta_j(\bar{v}) : j \in J\}$, avec $|I|,\ |J| < \kappa$.

Si
$$\mathcal{M} \models \bigvee_{i \in I} \phi_i(\bar{v}) \leftrightarrow \neg(\bigvee_{j \in J} \theta_j(\bar{v})),$$
alors il existe $I_0 \subset I$, I_0 fini tel que
$$\mathcal{M} \models \bigvee_{i \in I} \phi_i(\bar{v}) \leftrightarrow \bigvee_{i \in I_0} \phi_i(\bar{v})).$$

Théorème 7.20 *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\aleph_0$-saturée et soit $\phi(\bar{v})$ une $\mathcal{L}_M$-formule de rang de Morley α. Soit $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ une $\mathcal{L}$-formule et soit $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Alors $\{\bar{b} \in N :\ RM(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha\}$ est définissable à paramètres dans M. Si $A \subset M$ et si $\phi(\bar{v})$ est une $\mathcal{L}_A$-formule, cet ensemble est $\mathcal{L}_A$-définissable.*

Définition 7.21 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie, soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et $A,\ B$ deux sous-ensembles de M. Soit $p \in S_n(A)$. On dit que p est B-définissable si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(\bar{v}, \bar{w})$, il existe une $\mathcal{L}_B$-formule $(d_p\phi)(\bar{w})$ telle que pour tout $\bar{a} \in A$, $\phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p$ ssi $\mathcal{M} \models (d_p\phi)(\bar{a})$.

Corollaire 7.22 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie ω-stable, soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et $A \subset M$. Alors tout $p \in S_n(A)$ est définissable sur un sous-ensemble fini de A.*

Définition 7.23 Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule. On définit $\mathcal{S}_\phi(B)$ l'ensemble des ϕ-types sur B c.a.d. les ensembles consistents de $\mathcal{L}_B$-formules à paramètres dans B de la forme soit $\phi(\bar{x}, \bar{b})$, soit $\neg\phi(\bar{x}, \bar{b})$, où $\bar{b}$ parcourt $B^{|\bar{y}|}$ et maximal pour cette propriété.

Corollaire 7.24 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie ω-stable, soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et $Y \subset X \subset M^n$ deux sous-ensembles définissables de M (avec paramètres dans M). Si X est A-définissable, où $A \subset M$, alors Y est $A \cup X$ définissable.*

Chapitre 8

Modèles dénombrables des théories $\aleph_1$ catégoriques

Théorème 8.1 *Soit T une théorie fortement minimale et soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. Soit $A \subset M$ et $\bar{a} \in M$. Alors, $RM(\bar{a}/A) = dim(\bar{a}/A)$.*

Définition 8.2 Prégéométries (X, cl).
L'ensemble (X, cl) est une prégéométrie si cl a sur les sous-ensembles A de X les propriétés suivantes :

1. $A \subset cl(A)$,
2. $cl(A) = \bigcup_{A' \in \mathcal{P}^{fin}(A)} cl(A')$
3. $cl(cl(A)) = cl(A)$,
4. si $a \in cl(Ab) \setminus cl(A)$, alors $b \in cl(Aa)$.

On a une notion d'indépendance et de base (voir [4], section 3.6, page 122)).

On dit que (X, cl) est une géométrie si c'est une prégéométrie où $cl(\emptyset) = \emptyset$ et pour tout $x \in X$, $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Prégéométries triviales/modulaires/localement modulaires.

Relativization/restriction : soit $S \subset X$, on définit

$$cl^S(A) := cl(A) \cap S \text{ et } cl_S(A) := cl(A \cup S).$$

Exemples :

Si X est un ensemble minimal et acl la clôture modèle théorique, on a vu que (X, cl) était une prégéométrie (voir Proposition 3.9).

Soit V un K-espace vectoriel, où K est un corps commutatif et cl est la dépendance linéaire ;

Soit C un corps algébriquement clos et cl est la dépendance algébrique.

Soit V un K-espace vectoriel et soit $W \subset V$, on définit $cl(W)$, le plus petit sous-espace affine contenant W.

Soit T une théorie $\aleph_1$-catégorique et soit $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ deux modèles de T. Soit $\phi(x)$ une $\mathcal{L}_M$-formule fortement minimale. Soit $A \subset N$. On définit $cl(A) := acl^{\mathcal{N}}(A \cup M) \cap \phi(N)$ et on pose $dim_\phi(N/M) := dim(\phi(N), cl)$.

Théorème 8.3 *Si* $b_1, \cdots, b_n \in \phi(N)$ *sont indépendants au-dessus de* M *et si* $\mathcal{N}$ *est premier au-dessus de* $M \cup \{b_1, \cdots, b_n\}$*. Alors* $dim_\phi(N/M) = n$ *et* $dim_\phi(N) = dim_\phi(M) + dim_\phi(N/M)$*.*

Lemme 8.4 *Soit* T *une théorie* ω*-stable. Soient* $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ *deux modèles de* T *et soit* $\phi(x)$ *une formule fortement minimale. Soient* $b_1, \cdots, b_n \in \phi(N)$ *et acl-indépendants. Alors* $b_1, \cdots, b_n$ *restent acl-indépendants sur* M*.*

Corollaire 8.5 *Sous les hypothèses du Théorème, on a que* $dim_\phi(N/M)$ *est égale à la longueur maximale d'une chaîne élémentaire entre* M *et* N *i.e.*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \precneqq \mathcal{M}_1 \precneqq \cdots \precneqq \mathcal{M}_n = \mathcal{N}.$$

Théorème 8.6 (Baldwin-Lachlan) *Soit* T *une théorie* $\aleph_1$*-catégorique et soit* $\mathcal{M}_0$ *un modèle premier de* T*. Soit* $\phi(x)$ *une* $\mathcal{L}_{M_0}$*-formule fortement minimale et supposons que* $dim_\phi(\mathcal{M}_0) = m_0 \in \mathcal{N} \cup \{+\infty\}$*. Si* $m_0 = \omega$*, alors* T *est également* $\aleph_0$*-catégorique. Si* $m_0 \in \mathbb{N}$*, alors pour tout cardinal* $m \geq m_0$*, il existe un unique modèle* $\mathcal{M}$ *(à iso près) de* T *tel que* $dim_\phi(M) = m$ *et ces modèles sont 2 à 2 non-isomorphes.*

Chapitre 9

9.1 Théories stables

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète. Soit $\mathcal{M} \models T$ et $A \subset M$.

Définition 9.1 La $\mathcal{L}$-théorie T est stable si elle est κ-stable pour un certain cardinal $\kappa \geq \aleph_0$.

Une théorie T est superstable s'il existe un cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ tel que pour tout cardinal $\lambda \geq \kappa$, T est λ-stable.

Exercice : montrer que la théorie de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est superstable (mais pas ω-stable).

Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule.

Définition 9.2 On dit que $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ est *stable* s'il existe un cardinal infini κ tel que $|S_\phi(B)| \leq \kappa$ pour tout B de cardinalité plus petite ou égale à κ.

Proposition 9.3 *T est stable si toute ses formules $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sont stables.*

Théorème 9.4 *Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ est stable,*
2. *ϕ n'a pas la propriété de l'ordre,*
3. *ϕ n'a pas la propriété de l'arbre binaire.*

Exemple : Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole infinie. Alors la formule $x = x \wedge y$ a la propriété de l'ordre dans $\mathcal{B}$.

Définition 9.5 La formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a *la propriété de l'indépendance* s'il existe des $\bar{a}_i$, $i \in \omega$ tels que pour tout sous-ensemble E de ω l'ensemble des formules suivant est consistent : $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in E\} \cup \{\neg\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \notin E\}$. La théorie T est NIP si aucune de ses formules n'a la propriété de l'indépendance.

La formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a *la propriété de l'ordre strict* s'il existe des $\bar{a}_i$, $i \in \omega$ tels que

$$\forall \bar{y} \phi(\bar{a}_i, y) \to \phi(\bar{a}_j, \bar{y})) \leftrightarrow i \leq j.$$

Exercice Montrer que dans RCF aucune formule $\phi(x, \bar{y})$ n'a la propriété de l'indépendance.

Théorème 9.6 *Si T est instable alors il y a une formule qui a soit la propriété de l'indépendance, soit la propriété de l'ordre strict.*

Théorème 9.7 *La formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ est stable ssi tous les ϕ-types sont définissables.*

9.2 Modèles monstres

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète avec des modèles infinis.

Souvent il est pratique de se placer dans un modèle λ-saturé et qui est λ-fortement homogène, pour un cardinal λ suffisament grand. Une structure $\mathcal{M}$ est dite fortement λ-homogène si pour toutes suites $\bar{a}$, $\bar{b}$ de longueur strictement plus petite que λ, si $(\mathcal{M}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{M}, \bar{b})$, alors il existe un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Ces deux propriétés sont impliquées par celle d'être λ-large ([2, chapitre 10]). Soit λ un cardinal régulier strictement plus grand que $\mathcal{L}$. On montre que tout modèle $\mathcal{M}$ a une telle extension élémentaire qui est λ-large ([2, Théorème 10.2.1]) et on peut borner le cardinal d'une extension par $|M|^{<|\lambda|}$.

Une autre approche des modèles *monstres* est faite dans [10, chapitre 6], où ils travaillent dans une extension conservative BGC (Bernays-Gödel+axiome du choix) de ZF, en travaillant dans un langage à deux sortes : les ensembles et les classes. Dans cette extension de ZFC, on montre [10, Corollary 6.1.8], que toute théorie T a un "modèle" $\mathfrak{C}$ (qui est une classe) qui a les propriétés suivantes : $\mathfrak{C}$ est saturé pour tout cardinal κ, tout modèle de T (au sens habituel) se plonge de façon élémentaire dans $\mathfrak{C}$ et toute application partielle élémentaire entre deux sous-ensembles de $\mathfrak{C}$ peut s'étendre en un automorphisme de $\mathfrak{C}$.

Annexe A

Rappels sur les algèbres de Boole.

Soit $\mathcal{L} := \{\wedge, \vee, ', 0, 1\}$ le langage des algèbres de Boole. Soit T la théorie suivante des algèbres de Boole dans le langage $\mathcal{L}$.

1. $0' = 1$, $1' = 0$
2. $\forall x\ (x \wedge 0 = 0 \,\&\, x \vee 1 = 1)$
3. $\forall x\ (x \wedge 1 = x \,\&\, x \vee 0 = x)$
4. $\forall x\ (x \wedge x' = 0 \ \&\ x \vee x' = 1)$
5. $\forall x\ ((x')' = x)$
6. $\forall x\ (x \wedge x = x \ \&\ x \vee x = x)$
7. $\forall x\ \forall y\ ((x \wedge y)' = x' \vee y')$,
8. $\forall x\ \forall y\ (x \wedge y = y \wedge x \ \&\ x \vee y = y \vee x)$,
9. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z) \ \&\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$
10. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ \&\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

Exemple : Soit I un ensemble et $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble de toutes ses parties, la structure $(\mathcal{P}(I), \cap, \cup, ^c, \emptyset, I)$ est une algèbre de Boole.

Remarque : La théorie T des algèbres de Boole est axiomatisée par les axiomes : (3), (4), (8), (10).

Définition A.1 Soit $\mathcal{B} := (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ une algèbre de Boole. Un *atome* $a \in B$ est un élément non nul de B tel que $\forall b\ (a \wedge b = b \rightarrow (a = b \text{ ou } b = 0))$.

Sur $\mathcal{B}$ on peut mettre un ordre partiel $\leq$ définit par $c \leq d$ si $c \wedge d = c$.

Une algèbre de Boole est atomique si tout élément non nul contient un atome. dans ces algèbres, les atomes sont les éléments non nuls minimaux pour $\leq$.

Exercices :

Montrer qu'une algèbre de Boole finie est de la forme $\mathcal{P}(I)$, où I est l'ensemble de ses atomes.

Soit R un anneau unitaire satisfaisant à l'énoncé $\forall x \ \ (x^2 = x)$. Montrez que l'on peut munir R d'une structure d' algèbre de Boole.

Annexe B

Rappels trés brefs sur les ordinaux et les cardinaux.

Ce chapitre est basée sur les chapitres 1 et 2 du livre de J-L Krivine ([5])ainsi que sur l'appendice A, du livre de D. Marker ([7] pages 315-322.)

Tout d'abord, si $(A, <)$ est un ensemble totalement ordonné, on dit qu'il est *bien ordonné* (b.o.) si tout sous-ensemble non vide de A a un plus petit élément.

Exemples : $(\mathbb{N}, <)$ est b.o., alors que $(\mathbb{Z}, <)$ ne l'est pas.

Rappelons tout d'abord que le lemme de Zorn et le principe du bon ordre (i.e. tout ensemble peut être b.o.) sont des formes équivalentes de l'axiome du choix.

Un ensemble A est *transitif* si pour tout $a \in A$ et $b \in a$, on a $b \in A$ et donc si $x \in A$, alors $x \subset A$.

Un ensemble A est un *ordinal* si A est transitif et si la relation $\in$ est une relation d'ordre (total) strict sur A qui est un bon ordre.

On notera la *classe* des ordinaux par On. En particulier, si $\alpha \in On$, alors $\alpha \notin \alpha$. Sur un ordinal α, on utilisera $<$ pour $\in$.

Sur la classe On, la relation $\in$ est également transitive et c'est un ordre total strict qui est un bon ordre. Au lieu de $\alpha \in \beta$, on écrira $\alpha < \beta$, $\alpha,\ \beta \in On$.

Par définition si $\alpha \in On$, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. De plus les segments initiaux d'un ordinal sont lui-même et ses éléments.

On supposera toujours le principe du bon ordre et donc tout ensemble A peut etre bien ordonné, disons par un ordre $<$. De plus, il existe un ordinal α tel que $(A, <)$ est isomorphe à $(\alpha, \in)$.

Montrons que On ne peut etre un ensemble A. Par le principe du bon ordre A peut être b.o. et tout élément de A est un ordinal et donc est inclus à A. Donc A est un ordinal (car transitif et bien ordonné). Donc $A \in A$, ce qui contredit le fait que sur les ordinaux la relation d'appartenance soit une relation d'ordre strict.

Démonstration par induction. Soit $P(x)$ une formule à une variable libre et supposons que l'on veuille montrer que pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$. Alors il suffit de montrer pour tout α, si pour tout $\beta < \alpha$ on a $P(\beta)$, alors $P(\alpha)$.
Preuve : En effet s'il existe un ordinal α tel que $\neg P(\alpha)$, alors il en existe un plus petit disons

α_0 car On est bien ordonné. Donc, pour tout $\beta < \alpha_0$ on a $P(\beta)$, or par hypothèse on aurait $P(\alpha_0)$, une contradiction. $\square$

Si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal et c'est le plus petit ordinal plus grand que α. On dira que c'est le *successeur* de α. On le notera $\alpha + 1$.

Tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure qui est la réunion des éléments de cet ensemble. Soit a un ensemble d'ordinaux, alors sa borne supérieure est $\bigcup_{\gamma \in a} \gamma$.

Si un ordinal n'est pas le successeur d'un autre ordinal, on dira qu'il est *limite*. Notons que si α est un ordinal limite, alors pour tout $\beta < \alpha$, $\beta + 1 < \alpha$.

Notons que $\emptyset$ est un ordinal et que c'est le plus petit ordinal car $\emptyset \subset \alpha$. Son successeur est $\{\emptyset\}$, le successeur est $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc. On dira qu'un ordinal α est *fini* si pour tout $\beta \leq \alpha$, $\beta \neq \emptyset$, il existe γ tel que $\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$.

On note le plus petit ordinal infini ω.

Le *cardinal* de A est le plus petit ordinal tel qu'il existe un bon ordre $<$ sur A tel que $(A, <)$ est isomorphe à $(\alpha, \in)$. On note cet ordinal par $|A|$

Un ordinal α est un cardinal si $\alpha = |\alpha|$. Les ordinaux finis sont tous des cardinaux et l'ordinal ω est aussi un cardinal que l'on notera par $\aleph_0$. La classe des cardinaux infinis est isomorphe (en tant que bon ordre) à On et si α est un ordinal, on note $\aleph_\alpha$ l'image de α par cet isomorphisme. En particulier on a que $\aleph_{\alpha+1}$ est le plus petit cardinal strictement plus grand que $\aleph_\alpha$.

On définit la somme et le produit de deux cardinaux de la façon suivante. Soit $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$. Alors $\kappa + \lambda = |(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)|$ et $\kappa.\lambda = |X \times Y|$.

On montre que si l'un des cardinaux est infini, $\kappa + \lambda = \kappa.\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

De plus si $|I| = \kappa$ et pour tout $i \in I$, $|A_i| \leq \kappa$, alors $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \kappa$.
En effet : Pour chaque i, comme $|A_i| \leq \kappa$, on peut construire une surjection $f_i : \kappa \to A_i$ (en utilisant l'axiome du choix). De même, il y a une surjection (en fait une bijection) $g : \kappa \to I$. On peut donc construire une surjection $f : \kappa = \kappa \times \kappa \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\alpha, \beta) \mapsto f_{g(\alpha)}(\beta)$.

On définit l'exponentiation par $\kappa^\lambda := |X^Y|$, où X^Y dénote l'ensemble des fonctions de Y dans X.

On a pour $2 \leq \kappa < \lambda$ et $\aleph_0 \leq \lambda$ que $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

L'hypothèse du continu (*généralisée*) est l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).

P. Cohen, en 1973, a montré qu'on ne pouvait prouver cette hypothèse dans ZFC mais qu'elle était consistente avec ZFC c.a.d. il a construit deux modèles de ZFC l'un où $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et l'autre où ces deux cardinaux étaient différents.

Dans les références citées ci-dessous, se trouvent de nombreux exercices.

Bibliographie

[1] Chang, C. C., Keisler, H. J., Model theory, (Third edition), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990 (1977, 1973).

[2] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] Jacobson, N., Basic Algebra 1 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).

[4] Jacobson, N., Basic Algebra 2 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).

[5] Krivine, J.-L., Théorie axiomatique des ensembles, collection PUF, 1969 (ou réédition en 1972).

[6] Lang S., Introduction to algebraic geometry, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1972.

[7] Marker, D., Model theory. An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]

[9] Prestel A., Model theory for the real algebraic geometer, Pisa Instituti editoriali e poligrafici internazionale, 1998.

[10] Tent, K., Ziegler, M., A course in model theory, Lecture Notes in Logic, 40, Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.