Anneaux de différence et modules valués.

Françoise Point
(FRS-FNRS (Université de Mons)).

29 janvier 2010.

Based on joint works with E. Hrushovski and L. Bélair.

Plan de l'exposé:

- Deux classes décidables d'anneaux de différence.
- *La plupart* sont indécidables.
- Les anneaux de différence vus comme modules sur des anneaux de polynomes gauches.
- Modules valués.

Une $\mathcal{L}$-théorie T est décidable s'il existe un algorithme qui, étant donné un $\mathcal{L}$-énoncé, détermine si c'est un théorème de T.

Anneaux des suites à coéfficients dans $\mathbb{F}_p$ et automates finis.

[Buchi] La théorie monadique du second ordre de $(\mathbb{N}, S, \leq)$ est décidable.

On interprète la théorie de l'anneau $(\mathbb{F}_2^\omega, +, ., \sigma_t)$, où σ_t est le *shift*, dans cette théorie.

Proposition: Soit $R := ({\mathbb{F}_p^\omega}_{\mathcal{F}}, +, ., \sigma_t)$. Alors la théorie de R est modèle-complète.

Preuve: On montre que l'on peut exprimer avec une formule existentielle le fait qu'un ensemble définissable est reconnaissable par un automate fini.

Un anneau commutatif est von Neumann regulier, c.a.d.

$$\forall a \exists b \ \ a^2.b = a \ \& \ \ b^2.a = b.$$

ou encore un produit booléen de corps.

Proposition: Soit F un corps de caractéristique zero. Alors, on peut interpreter $(\mathbb{Z}, +, ., 0, 1)$ dans $(F^{\omega}_{\mathcal{F}}, +, ., -, \sigma_t)$.

Preuve: On définit $\mathbb{Z}$ comme suit: $x \in \mathbb{Z}$ ssi $(\sigma_t(x) = x$ et $\exists y\ (\sigma_t(y) - y)^2 = 1$ et $x - y$ et y sont des diviseurs de zero).

Soit $y = (y(n))_{\mathcal{F}}$, puisque y est un diviseur de zero, pour une infinité de n, on a que $y(n) = 0$,
puisque $(\sigma_t(y) - y)^2 = 1$, cela implique que pour un nombre cofinal de n on a que $y(n) = \sigma_t(y)(n) \pm 1$,
et finalement on utilise que $y(n) = x(n)$ pour une infinité de n.

Soit (R,σ) un anneau de différence von Neumann regulier et soit $\mathcal{B}(R)$ l'algèbre de Boole de ses idempotents, on distingue les cas suivants:

1. Soit il existe n tel que $\sigma^n = 1$ sur $\mathcal{B}(R)$, ou bien

2. σ a des orbites de taille non bornée sur $\mathcal{B}(R)$ et $Fix(\sigma)$ est un corps infini, ou

3. σ a des orbites de taille non bornée sur $\mathcal{B}(R)$ et $Fix(\sigma)$ est fini,

4. σ a des orbites de taille non bornée sur $\mathcal{B}(R)$ et $Fix(\sigma)$ est infini mais $Fix(\sigma) \cap \mathcal{B}(R) \neq \{0,1\}$.

Dans le cas 1, on appliquer des résultats de transferts dus à S.Burris et Werner sur les produits booléens de corps de différence existentiellement clos (i.e. des modèles de $ACFA$).

Dans le cas 2, on montre que la théorie de R est indécidable.

Proposition: Soit R un anneau commutatif von Neumann régulier de différence (de caractéristique p ou 0). Supposons qu'aucune puissance de σ ne fixe le spectre maximal de R, alors la théorie de R est indécidable.

Corollaire: La théorie de l'anneau de toutes les suites à coéfficients dans $(\mathbb{F}_p)^{alg}$ avec le shift est indécidable.

Résultats d'indécidabilité pour les anneaux commutatifs de Bezout.

Definition (rappel): Un anneau commutatif est de *Bezout* (resp. b-Bezout) si tout idéal de type fini est principal (resp. engendré par b éléments, $b \in \mathbb{N} - \{0\}$).

Exemples d'anneaux de Bezout: les anneaux von Neumann réguliers (tout idéal de type fini est engendré par un idempotent), anneaux de valuation, l'anneau des fonctions entières, $\tilde{Z}$ l'anneau des entiers algébriques.

Proposition: Soit R un anneau commutatif Bezout de différence de caractéristique 0. Supposons que le sous-anneau fixé par σ soit un corps infini. Alors soit une puissance de σ fixe le spectre maximal de R, ou bien la théorie de R est indécidable.

Preuve: On interprète une sous-théorie finiment axiomatisable indécidable de l'arithmétique de Peano.
Le point essentiel consiste à definir l'intervalle $[0\ ,\ n] \cap \mathbb{Z}$ par une formule (avec paramètres) qui ne dépend pas de n.

Soit $\mathbb{C}\{z^{-1}\}$ l'anneau des séries formelles des fonctions convergentes en z^{-1} et soit σ_1 l'automorphisme envoyant $f(z) \to f(z+1)$, où $f \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$.

Corollaire: La théorie de $(\mathbb{C}\{z^{-1}\}, +, ., 0, 1, \sigma_1)$ est indécidable.

Théorie des modules.

Soit (K, σ, ∂) un corps muni d'un endomorphisme σ et d'une σ-dérivation ∂ i.e.
$\partial(x.y) = \partial(x).y^\sigma + x.\partial(y)$.

Remarque: comme K est ici commutatif si $\sigma \neq 1$, une σ-derivation est de la forme $\partial(x) = (x^\sigma - x).c$, où $c \in K$.

Soit A l' anneau des polynomes gauches $K[t; \sigma, \partial]$, où la loi de commutation est donnée par

$$k.t = t.k^\sigma + \partial k$$

pour $k \in K$.

Cet anneau est intègre et Euclidien à gauche et si σ est un automorphisme de K, Euclidien à droite.

Soit A un anneau et soit $L_A := \{+, -, 0, \cdot a;\ a \in A\}$ le langage des A-modules. Soit T_A la $\mathcal{L}_A$-théorie des A-modules à droite.

Soit T_d (respectivement $T_{d,\sigma}$) la théorie T_A avec les axiomes suivants:

1. $\forall m\ \exists n\ \ (m = n.t)$, $\ \&\ \forall m\ (m.t = 0 \rightarrow m = 0)$,

2. $\forall m\ \exists n\ (n.q(t) = m)$, où $q(t)$ varie dans les polynômes irréductibles de A avec $q(0) \neq 0$.

Soit T_{Ore} (respectivement $T_{Ore,\sigma}$) la théorie T_d (respectivement $T_{d,\sigma}$) avec le schéma d'axiomes $\exists n \neq 0\ n.q(t) = 0$, où $q(t)$ varie dans les polynômes irréductibles de A (respectivement $q(t)$ varie dans les polynômes irréductibles de A avec $q(0) \neq 0$).

Proposition: la théorie T_d admet l'élimination des quantificateurs positive c.a.d. toute formule positive primitive est équivalente à une conjonction de formules atomiques.

D'une part on utilise le fait que dans tout module, toute formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules positives primitives (Lemme de B.H. Neumann) et d'autre part au fait sur un anneau Euclidien à gauche et à droite toute formule existentielle est équivalente à des conditions de divisibilité et d'annulateur sur les paramètres.

Chaque complétion de T_d admet l'elimination des quantificateurs (e.q.). Si $Fix(\sigma) \cap F_\partial$ est infini, les complétions de T_d sont obtenues en spécifiant pour quels polynomes irréductibles $q(t)$ où $q(0) \neq 0$ on a $ann(q(t)) \neq \{0\}$.

En particulier, les théories T_{Ore} (respectivement $T_{Ore,\sigma}$) ont l'e.q.

Pour toute paire d' éléments $\{q_1(t), q_2(t)\}$ avec $deg(q_1(t)) > deg(q_2(t))$ de A, si $M \models T_d$ (respectivement $T_{d,\sigma}$), on a l'équivalence suivante:

$q_2(t)$ divise $q_1(t)$ si et seulement si $ann_M(q_2) \subseteq ann_M(q_1)$.

De plus si $q_1(t) = q_2(t).r(t)$ et si la cardinalité du quotient $ann(q_1(t))/ann(q_2(t))$ est finie, alors $|ann(q_1(t))/ann(q_2(t))| = |ann(r(t))|$.

Si $Fix(\sigma) \cap K_\partial$ est fini, alors les completions de T_d (respectivement $T_{d,\sigma}$) sont obtenues en spécifiant pour chaque polynome $q(t)$ si le cardinal $|ann(q(t))|$ est fini et sa valeur.

Exemples $(\partial = 0)$.

Extensions de Picard-Vessiot.

A la formule atomique $v.(t^n + t^{n-1}.a_{n-1} + ... + a_0) = 0$, on associe une équation de différence: $\sigma V = V.A$,
où $B \in M_n(K)$, $V := (v, \sigma v, \cdots, \sigma^{n-1} v)$

$$\begin{pmatrix} \sigma v & \sigma^2 v & . & . & \sigma^n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \sigma v & . & . & \sigma^{n-1} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_1 \\ & & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dès que $a_0 \neq 0$, on a $B \in GL_n(K)$. Si σ est un automorphisme, on peut toujours supposer que l'on est dans ce cas.

Posons $C = Fix(\sigma)$ et supposons que C est algébriquement clos et K parfait.

Supposons aussi que (K, σ) est un sous-corps de difference de $(C^{\omega}_{\mathcal{F}}, \sigma_t)$ et que la cloture algébrique de K est incluse dans $C^{\omega}_{\mathcal{F}}$.

On appelera un tel corps de différence un PV-corps.

Si (K, σ) est un PV-corps et si $\sigma Y = Y.A$ avec $A \in GL_n(K)$, l'anneau de Picard-Vessiot associé à ce système se plonge dans $C^{\omega}_{\mathcal{F}}$. De plus il existe $Z \in GL_n(C^{\omega}_{\mathcal{F}})$ telle que toute solution est une C- combinaison linéaire des colonnes de Z.

Supposons que K est un PV-corps, alors $C^{\omega}_{\mathcal{F}}$ est un modèle de $T_{Ore,\sigma}$.

De plus si R est un anneau de difference qui est une K-algèbre, où K est un PV-corps. Alors comme $K[t;\sigma]$-module, R se plonge dans un modèle de $T_{Ore,\sigma}$.

Soit (K, v) un corps valué et $\mathcal{K} := (K, v, \sigma, \partial)$ une expansion de ce corps où σ est un automorphisme et ∂ une σ-dérivation.

De plus, σ est une isométrie de K i.e. pour tout $k \in K$ $v(k) = v(k^\sigma)$ et ∂ est contractante i.e. $v(\partial(x)) \geq v(x)$.

Soit $q(t) \in A - \{0\}$, $q(t) = \sum_{i=0}^{n} t^n.a_i$, $a_i \in K$. Puisque σ est une isométrie, on peut prolonger v sur A en posant

$$v(q(t)) := min\{v(a_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K, et notons, pour $a \in \mathcal{O}_K$, $\overline{a} := a + \mathcal{M}_K$, l'application résiduelle. On considère le sous-anneau $A_0 := \mathcal{O}_K[t; \sigma, \partial]$ de A; c'est un sous-anneau de Ore.

Le groupe de valeurs $(\Gamma, +, \leq, 0, 1)$ de K est un groupe abélien totalement ordonné.

Soit $\mathcal{K} := (K, v, \sigma, \partial)$ où σ est une isométrie et ∂ une σ-dérivée contractante.

Lemme de Hensel linéaire

$\mathcal{K}$ satisfait le Lemme de Hensel linéaire si pour tout $q[X] \in \mathcal{O}_K[X]$ tel que $\bar{q}[X] \neq 0$.
Supposons qu'il existe b $\bar{q}(\bar{b}) = \bar{a}$ et que pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_K - \{0\}$, il existe $u \in \mathcal{O}_K$ tel que $1 + \overline{q^{\lambda}}(\bar{u}) = 0$,
alors il existe c tel que $q(c) = a$ et $v(b - c) > 0$.

Proposition: Si la valuation v est discrète et (K, v) est un valué corps complet, alors $\mathcal{K}$ satisfait au Lemme de Hensel linéaire.

Un corps F de caractéristique p est p-clos si F n'a pas d'extension algébrique finie de degré divisible par p.
C'est équivalent à ce que tout polynome de la forme

$$\sum_i c_i.x^{p^i} = c,$$

où $c, c_i \in F$, a une racine (G. Whapples).
Il y a un corps p-clos minimal $\bigcup_{n\in\omega} \mathbb{F}_{p^{p^n}}$. Sa théorie est décidable (Ax).

Exemples de modèles de T_{Ore} (respectivement $T_{Ore,\sigma}$) où $A := F[t;\sigma,\partial]$.

(F,σ) est un corps de différence:
Soit F un corps de caractéristique p, p-clos, alors $(W(F),\sigma_F) \models T_{Ore,\sigma}$ et
$(F((x)),\sigma) \models T_{Ore,\sigma}$ où σ agit sur les coéfficients de la série de Laurent.

(F,∂) est un corps différentiel de caractéristique 0 et le sous-corps des constantes est algébriquement clos.

$(\tilde{F}((x)), v_x, \partial) \models T_{Ore}$ où $\partial(\sum_{i\geq m} x^i.a_i) := \sum_{i\geq m} x^i.\partial(a_i)$.

$(\tilde{F}((x^{-1})), v_{x^{-1}}, \partial) \models T_{Ore}$ où $\partial(\sum_{i\geq m} x^{-i}.a_i) := (a_m).x^{-m} + \sum_{i\geq m}(-i.a_i + \partial(a_{i+1}).x^{-(i+1)}$,

où $\tilde{F}$ est une extension de F qui a le même corps des constantes, qui n'a pas d'extensions de Picard-Vessiot propre et telle que tout sous-ensemble fini de F est inclus dans une suite finie d'extensions de Picard-Vessiot successives. (Voir A. Magid- existence et unicité).

Rappelons que si le sous-corps $Fix(\sigma)$ de K est infini, alors les completions de T_d (respectivement $T_{d,\sigma}$) sont obtenues en spécifiant pour quels polynomes irréductibles $q(t)$, on a $ann(q(t)) \neq \{0\}$ et sous cette hypothèse, T_{Ore} (respectivement $T_{Ore,\sigma}$) admet l'élimination des quantificateurs.

Dans le cas où K est non trivialement valué, on peut donner des conditions qui impliquent que $Fix(\sigma)$ est infini. (Pour $K = F((x^{-1}))$, ça a été traité par Y. Hellegouarch).

Soit K un corps non trivialement valué de différence qui satisfait au Lemme de Hensel linéaire, où l'action de t est donnée par σ et que pour tout $\mu \in \bar{K}$, $ann(t - \mu) \neq 0$ dans le corps résiduel $\bar{K}$ de K. Alors $Fix(\sigma)$ est infini.

Modules valués.

Nous allons enrichir le langage des modules par
soit une chaine de prédicats pour des sous-groupes,
soit une *valuation*.

Soit $\mathcal{K} := (K, v, \sigma, \partial)$ un corps valué avec une isométrie et une dérivée contractante et soit A l'anneau des polynomes gauches $K[t; \sigma, \partial]$ et $\Gamma = v(K)$.

Soit M un A-module. Soit $w : M \to \Delta \cup \{+\infty\}$, où $(\Delta, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné et $+\infty > \Delta$.

On suppose que l'on a une action du groupe Γ sur l'ensemble totalement ordonné Δ, notée par $+$, donc $\Gamma \subseteq Aut(\Delta, \leq)$.

Pour tout $\delta \in \Delta$ et $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, alors
$\delta + \gamma \in \Delta$ et $(\delta + \gamma_1) + \gamma_2 = \delta + (\gamma_1 + \gamma_2)$.

De plus, cette action respecte l'ordre: pour tout $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$
et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, si $\Delta \models \delta_1 \leq \delta_2$ et $\Gamma \models \gamma_1 \leq \gamma_2$,
alors $\delta_1 + \gamma_1 \leq \delta_2 + \gamma_2$.

A partir de mantenant, on supposera que la structure à deux sortes $((\Delta, \leq), (\Gamma, +, -, 0, \leq), +)$ satisfait les axiomes ci-dessus que l'on notera T_Δ.

Soit T_w la théorie des A-modules valués comme structures à deux sortes $(M, \Delta \cup \{\infty\}, w)$, où M est un A-module, et $w(0) = +\infty$, $w : M - \{0\} \to \Delta$, satisfait en plus:

1. $M \models T_A$,

2. $((\Delta, \leq), (\Gamma, +, -, 0, \leq), +) \models T_\Delta$, où $\Gamma = v(A)$

3. $\forall m_1 \in M \forall m_2 \in M \ w(m_1 + m_2) \geq min\{w(m_1), w(m_2)\}$, $w(0) = +\infty$,

4. $\forall m \in M - \{0\} \ w(m.t) = w(m)$,

5. $\forall m \in M \ w(m.\lambda) = w(m) + v(\lambda)$, for all $\lambda \in K - \{0\}$,

1. Structures abéliennes.

Soit M un A-module valué. On définit dans M un ensemble de sous-groupes, indexés par les éléments γ du groupe de valeurs Γ de A.

$$V_\gamma = \{m \in M \;\; w(m) \geq \gamma\}.$$

Chaque sous-groupe V_γ est invariant par multiplication par les éléments de $\mathcal{O}_K$; et donc chacun de ces sous-groupes est un A_0-module.

On considére le A-module M equippé avec une chaine de sous-groupes V_γ, comme une $\mathcal{L}_V$-structure, où

$$\mathcal{L}_V := \mathcal{L}_A \cup \{V_\gamma; \gamma \in \Gamma\}.$$

On considère la $\mathcal{L}_V$-structure

$$\mathcal{M} := (M, +, 0, .r; r \in A, V_\gamma; \gamma \in \Gamma).$$

Rappelons qu'une formule positive primitive $\phi(\mathbf{x})$ est de la forme:

$$\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \ \bigwedge_i (\mathbf{x}, \mathbf{y}).B = 0 \ \& \ V_{\gamma_i}(t_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

où B est une matrice à coéfficients dans A, $\gamma_i \in \Gamma$ et $t_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un terme (dans le langage des $\mathcal{L}_A$-modules).

Sur chacun des prédicats V_γ, où $\gamma \in \Gamma$, on demande:

1. $\forall m \, \exists n \ (m = n.t)$,

2. $\forall m\ \exists n\ (n.q(t) = m)$, où $q(t)$ varie sur les polynomes irreductibles de A avec $q(0) \neq 0$.

3. $\forall m\ \ V_\gamma(m) \leftrightarrow V_\gamma(m.t)$

4. $\forall m_1\ \forall m_2\ \ V_\gamma(m_1)\ \&\ V_\gamma(m_2) \rightarrow V_\gamma(m_1 + m_2)$

5. $\forall m\ \ V_\gamma(m) \rightarrow V_{\gamma+v(\lambda)}(m.\lambda)$, pour tout $\lambda \in K$,

6. $\forall m\ \ V_\gamma(m) \rightarrow V_{\gamma+v(q(t))}(m.q(t))$, où $q(t) \in K[t,\sigma]$,

7. $\forall m \in V_\gamma\ \exists n \in V_\gamma\ \ n.q(t) = m$ pour tout $q(t) \in \mathcal{I}$ (i.e. $v(q(t)) = 0\ \&\ q(t) \in \mathcal{O}_K[t;\sigma]$).

Soit T_V la théorie T_A avec le shéma d'axiomes (1) à (6).
Soit T_V^* la théorie T_V avec le shéma d'axiomes (7).

Alors, T_V^* admet l'e.q. modulo les énoncés spécifiant les indices des sous-groupes définissables.

De plus tout modèle de T_V où t est injectif et n'accroit pas la valuation se plonge dans un modèle de T_V^*.

Exemples

Soit $A := F[t;\sigma,\partial]$ et F un corps de caractéristique p, p-clos.

Alors $(W(F),\sigma_F,(W(F))_{\delta\in\mathbb{Z}}))$ admet l'e.q. dans ce langage enrichi, ainsi que $(F((x)),\sigma,(F((x))_{\delta\in\mathbb{Z}}))$, où σ agit sur les coéfficients de la série de Laurent i.e. $\sigma(\sum_i c_i.x^i) = \sum_i c_i^p.x^i$.

Soit (F,∂) est un corps différentiel de caractéristique 0 dont le sous-corps des constantes est algébriquement clos.

Alors, $K := (\tilde{F}((x)),v_x,\partial)$ où t agit comme ∂ c.a.d. $\partial(\sum_{i\geq m} x^i.a_i) := \sum_{i\geq m} x^i.\partial(a_i)$ et

$K := (\tilde{F}((x^{-1})),v_{x^{-1}},\partial)$ où $\partial(\sum_{i\geq m} x^{-i}.a_i) := (a_m).x^{-m}+\sum_{i\geq m}(-i.a_i+\partial(a_{i+1}).x^{-(i+1)}$, admettent l'e.q. lorsqu'on les regarde dans le langage enrichi par les prédicats pour les sous-groupes K_δ, $\delta\in\mathbb{Z}$.

2. Structures à deux sortes.

(M, w, Δ); $(\Delta, +, \Gamma)$, où $v(K) = \Gamma$ et $w : M \to \Delta$.

Notons que $\Delta = \bigcup_{a \in \Delta} \overline{Orb(a)} = \bigcup_{a \in \Delta} \Gamma / Fix_a(\Gamma)$.

Supposons que $(\Delta, \leq)$ est un ordre dense ou que $(\Gamma, +, -, \leq, 0, 1)$ est un groupe abélien discrètement ordonné où 1 est le plus petit élément strictement positif et Δ satisfait: $(\star)$

$$\forall \delta_1 \exists \delta_2 \forall \delta_3 \, (\delta_2 > \delta_1 \,\&\, (\, \delta_3 > \delta_1 \to (\delta_2 \leq \delta_3 \,\&\, \delta_2 = \delta_1 + 1)).$$

Soit $T_{\Delta,dense}$ la théorie T_Δ avec les axiomes exprimant que $(\Delta, \leq)$ est dense et soit $T_{\Delta,discrete}$ la théorie T_Δ avec: Γ est discrètement ordonné, Δ a un plus petit élément positif et satisfait $(*)$ plus haut.

Dans les deux cas, la structure $<(\Delta,\leq),(\Gamma,+,-,\leq,0),+>$ admet l'élimination des quantificateurs dans la sorte Δ.

Soit T_2 (respectivement T_{dense} ou $T_{discret}$) la théorie suivante de A-modules valués dans le langage à deux sortes $\mathcal{L}_v$.

Soit $\mathcal{I} := \{a \in A : v(a) = 0\}$.

1. T_w,

2. T_Δ, (respectivement $T_{\Delta,dense}$ ou $T_{\Delta,discret}$)

3. Axiomes de divisibilité (DG): pour tout $q \in \mathcal{I} \cup \{t\}$: $\forall x \in M - \{0\}\ \exists y\ (x = y.q\ \&\ w(x) = w(y)$.

4. Pas d'identités résiduelles (IR): pour tout ensemble fini d'éléments $p_0, p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{I}$, $\forall \delta \in \mathbf{\Delta}\ \forall x_1, \cdots, \forall x_n \exists y \in M\ \ (\bigwedge_{i=1}^n w(x_i) \geq \delta) \rightarrow$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} w(y.p_i + x_i) = \delta).$$

Soit $r \in A_0$ et $n \in \omega$.
On définit une formule résiduelle d'indice $Indr_{n,r}(\delta)$ comme suit:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} w(x_i - x_j) = \delta \,\&\, \bigwedge_{i=1}^{n} w(x_i.r) > \delta \,\&\, w(x_i) = \delta.$$

Dans la théorie T_2, toute $\mathcal{L}_v$-formule existentielle dans la sorte module est équivalente à une formule sans quantificateurs dans la sorte module et une formule existentielle dans la sorte ensemble totalement ordonné.

Soit $M \subset N$ deux A-modules valués satisfaisant T_2. Supposons que $\Delta_M \subset_{ec} \Delta_N$. Alors, $M \subset_{ec} N$.

Dans la théorie T_{dense} (respectivement $T_{discret}$), toute $\mathcal{L}_v$-formule dans la sorte module est équivalente à la conjonction d'une formule sans quantificateurs et de formules et énoncés résiduelles d'indices. (On peut donc déterminer les complétions.

Les exemples précédents sont des modèles de $T_{discret}$ et donc ont l'e.q. dans le langage des modules enrichi par une valuation et ont, comme on va le voir, la NIP.

Propriété NIP (i.e. ne pas avoir la propriété d'indépendence).

Rappelons que les théories suivantes ont la NIP: toute théorie stable (et donc toute théorie de modules), la théorie d'une chaine, la théorie des groupes abéliens totalement ordonnés.

On en déduit que les théories $T_{\Delta,dense}$ et $T_{\Delta,discret}$ de $(\Gamma, \Delta, +)$ ont la NIP.

Corollaire: $T_{discret}$ (resp. T_{dense}) a la NIP.

On suppose qu'il y a une formule $\phi(x, \bar{y})$ qui a la propriété d'indépendence c.a.d. on peut trouver des uples $(a_i, b_m)_{i \in \omega, m \in 2^\omega}$ dans un modèle de $T_{discret}$ tels que

$$\bigwedge_{i \in m} \phi(a_i, b_m) \wedge \bigwedge_{i \notin m} \neg\phi(a_i, b_m).$$